

Patrick Kotal

Spezielle Relativitätstheorie 1

6. überarbeitete Auflage

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

$$\tau_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt = \frac{1}{c} \int_A^B ds_{AB}$$

Patrick Kotal

Spezielle Relativitätstheorie 1

6. überarbeitete Auflage

Autor

Patrick Kotal

www.entrokon.de

patrickkotal@gmx.de

Impressum

Das Werk einschließlich aller Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors und Herausgebers. Das gilt insbesondere für Verfielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürfen.

Der Autor und der Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch der Autor oder der Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

© 2018 Patrick Kotal

6. überarbeitete Auflage 2026

Covergestaltung: Patrick Kotal

Druck: Patrick Kotal

ISBNI 100-A-B-1234444

Printed in Germany

Vorwort

In dieser Einführung zur Relativitätstheorie werden die grundlegenden physikalischen und mathematischen Konzepte der Speziellen Relativitätstheorie und einfache Fragestellungen der Elementarteilchenphysik aus logischen Überlegungen und im historischen Kontext dargestellt.

Besonderer Wert wird auf die Herleitung der Formelzusammenhänge aus physikalischen Überlegungen anhand historisch vorangegangener Erkenntnisse gelegt. Der gesamte Inhalt des Buches baut auf diesem Prinzip auf, sodass ein konsistenter logischer Faden die gesamten Kapitel durchzieht. Es wird gezeigt wie aus etablierten physikalischen Größen im historischen Kontext, mit den Methoden der Theoretischen Physik logisch neue physikalische Größen aus weiterführenden Überlegungen hergeleitet werden können. Die bahnbrechende Entwicklung der Relativitätstheorie durch Albert Einstein macht es zu einem besonderen Vergnügen dies im Nachgang in modernem Gewand in Form dieses Lehrbuches zu zelebrieren. Der Autor hofft, allen Lesenden dieses Vergnügen mit dem vorliegenden Werk ebenso zu bereiten, wie er es beim Schreiben und Recherchieren erfahren durfte.

Die Behandlung der Theorie im Rahmen des vollständigen 4-Tensorformalismus wird vorbereitet, jedoch nicht ausgeführt, um den mathematischen Abstraktionsgrad möglichst gering zu halten.

Gegenüber der 5. Auflage wurden einige Unklarheiten beseitigt und das Vorwort wurde geändert.

Mai 2026,

Patrick Kotal

Inhaltsverzeichnis

	Vorwort.....	III
1	Spezielle Relativitätstheorie 1.....	7
1.1	Newtonsches Relativitätsprinzip und Galilei-Transformation.....	8
1.2	Die Newtonschen Gesetze.....	14
1.3	Der Satz des Pythagoras der euklidischen Geometrie	20
1.4	Die Invarianz des Wegelementes unter Galilei-Transformation	21
1.5	Die klassische Transformation und Addition von Geschwindigkeiten.....	24
1.6	Die Ausbreitung von Schall und der akustische Dopplereffekt.....	28
1.7	Licht als elektromagnetische Welle im Vakuum.....	36
1.8	Die Ausbreitung von Licht in bewegter Materie.....	41
1.9	Das Michelson-Morley Experiment (1881).....	43
1.10	Die Axiome der Speziellen Relativitätstheorie.....	47
1.11	Gedankenexperimente zur Plausibilisierung der Konsequenzen der SRT.....	50
1.12	Die Zeitdilatation.....	54
1.13	Die Längenkontraktion.....	62
1.14	Die Lorentz-Transformation.....	64
1.15	Die relativistische Addition von Geschwindigkeiten.....	73
1.16	Die Wigner-Rotation und die Thomas-Präzession.....	81
1.17	Invarianz der elektromagnetischen Wellengleichung unter der Lorentz-Transformation.....	85
1.18	Fresnelsche Mitführung / Doppler-Effekt / Aberration von Sternenlicht	87
1.19	Der Minkowski-Raum.....	97
1.20	Das invariante Eigenzeitintervall.....	122
1.21	Beschleunigte Bewegung in der SRT - 1.....	125
1.22	Relativistische Dynamik.....	130
1.22.1	Die relativistische Massenzunahme.....	131
1.22.2	Herleitung und Bedeutung der Energie-Masse Äquivalenz $E=mc^2$	138
1.22.3	Die relativistische Energie-Impuls Relation.....	146

1.22.4	Transformation von Energie und Impuls.....	148
1.22.5	Relativistische Teilchenbewegung.....	153
1.22.6	Doppler-Formel mit SRT und Quantenphysik	156
1.22.7	Der Compton-Effekt.....	158
1.22.8	Grundlagen der Teilchenphysik.....	163
1.22.9	Teilchen-Antiteilchen Prozesse	168
1.22.10	Proton-Antiproton Paar-Bildung.....	170
1.22.11	Relativistisches Trägheitsgesetz und Transformation der Kraft	174
1.22.12	Relativistisches Drehmoment und Drehimpuls in der SRT.....	185
1.22.13	Die relativistische Beschleunigung.....	193
1.22.14	Der relativistische Raketenflug.....	198
1.22.15	Die relativistische Raketengleichung.....	206
1.23	Relativistische Elektrodynamik 1.....	214
1.23.1	Lorentz-Kraft und Newtonsche Relativität der elektromagnetischen Felder.....	215
1.23.2	Transformation der elektromagnetischen Felder.....	222
1.23.3	Das elektromagnetische Feld einer bewegten Ladung.....	228
1.23.4	Relativistische Bewegungsgleichung im elektromagnetischen Feld.....	231
1.23.5	Herleitung der Lorentz-Kraft.....	232
	Quellen.....	237

1 Spezielle Relativitätstheorie 1

Die Spezielle Relativitätstheorie (SRT) ist in ihrer gesamten Konsequenz eine Erweiterung der Newtonschen Mechanik (ohne Gravitationstheorie), sowie der klassischen Elektrodynamik. Alle Bewegungsgesetze von Körpern (ohne Gravitation), die bereits seit Newton bekannt waren, wurden durch die SRT auf ein neues Fundament gestellt. Sie erweitert die Gesetze der Newtonschen Mechanik (ohne Gravitation) und enthält diese als Spezialfall, wenn die Geschwindigkeit physikalischer Vorgänge sehr viel kleiner ist, als die Lichtgeschwindigkeit.

Wie die Newtonsche Mechanik, kann die Spezielle Relativitätstheorie in einen kinematischen Teil, der sich rein mit den Bewegungsgrößen beschäftigt und einen darüberhinausgehenden dynamischen Teil, der auch dazugehörige Kräfte und Impulse berücksichtigt, thematisch aufgeteilt werden. Die SRT fußt auf den Werken mehrerer bedeutender Experimentalphysiker, theoretischer Physiker und Mathematiker. Deren Vermächtnis ist keineswegs verloren gegangen. Ihre Namen sind zum Bestandteil einiger wichtiger Konzepte und Methoden (wie z.B. die Lorentz-Transformation, Poincare Transformation oder der Minkowski-Raum) der SRT geworden.

Allen voran ist es Albert Einsteins Verdienst, mit der Speziellen Relativitätstheorie eine konsistente Theorie entwickelt zu haben, die alle Versuchsergebnisse von Experimenten, die sich mit Fragestellungen zur Relativitätstheorie beschäftigen, erklären kann und zudem, mathematisch stichhaltige Vorhersagen für Ergebnisse noch folgender Experimente, liefert.

Als Bestandteil der Quantenfeldtheorie, bildet sie die theoretische Grundlage zahlreicher aktueller, naturwissenschaftlicher Erkenntnisse.

Im ersten Teil des Buches werden wir uns mit der SRT in der dreidimensionalen Formulierung, wie sie von Einstein selbst in die Wege geleitet wurde, beschäftigen. Die wesentlichen Erkenntnisse zum Verständnis der SRT, können ohne die Zuhilfenahme von 4-Tensoren der Raum-Zeit, in aller Anschaulichkeit abgeleitet werden.

1.1 Newtonsches Relativitätsprinzip und Galilei-Transformation

Wenn wir uns mit den Erkenntnissen der speziellen Relativitätstheorie beschäftigen wollen, dann ist es sinnvoll, sich zunächst in die Köpfe der Physiker Ende des 19. Jahrhunderts zu begeben. Ich beginne also meine Erläuterungen mit den Überzeugungen von Physikern wie Newton und Maxwell.

Ende des 19. Jahrhunderts war man überzeugt, dass man mit den von Newton formulierten physikalischen Gesetzen, die meisten Vorgänge in der Natur korrekt beschreiben kann.

Newton hat mit seiner Gravitationstheorie ein Erklärungsmodell geschaffen, das den Zusammenhang zwischen fallenden Gegenständen hier auf der Erde und der Bewegung der Planeten um die Sonne auf einen gemeinsamen Nenner bringt. Die von ihm formulierten Gesetzmäßigkeiten sind nach wie vor in erster Näherung korrekt, wenn man sich mit bestimmten Einschränkungen, zufrieden gibt. Welches diese Einschränkungen sind, konnte Einstein mit seiner Relativitätstheorie zeigen. Auf diese werden wir später im Detail zurückkommen. Ein Prinzip das jedoch von den im 20. Jhdt. entdeckten relativistischen Effekten nicht ausgehebelt wurde, ist das Newtonsche Relativitätsprinzip. Es wurde bereits von Galileo Galilei formuliert. Genau genommen handelt es sich um ein Axiom der Physik. Ein Axiom ist ein Satz, der nicht in der Theorie bewiesen wird, sondern vorausgesetzt wird, um darauf eine Theorie aufzubauen.

Das Newtonsche Relativitätsprinzip besagt bildlich gesprochen, dass die Bewegung eines Objektes in einem Fahrzeug nicht beeinflusst wird, solange das Fahrzeug sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt oder steht.

Man kann das leicht ausprobieren. Wirft man in einem Fahrzeug einen Gegenstand in die Luft, so wird dieser wieder genau in den Händen landen, wenn das Fahrzeug sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Stell Dir vor, du sitzt in einem Zugabteil, draußen ist es dunkel und du kannst nichts hören und sehen. Der Zug sei so gut gedämmt, dass keinerlei Fahrtbewegungen spürbar sind. Du bist eingeschlafen und wachst auf, weißt aber nicht ob der Zug noch fährt, oder steht. Kann man anhand eines beliebigen Experimentes feststellen, ob sich der Zug noch bewegt oder ob er steht.

Die Antwort lautet „Nein“. Und das ist die Aussage des Newtonschen Relativitätsprinzips. Das mag trivial klingen. Es besagt jedoch dass es kein mechanisches Verfahren gibt, mit dem man feststellen könnte ob der Raum in dem man sich befindet sich gleichförmig bewegt oder relativ zur Umgebung ruht.

In der Physik bezeichnet man einen geschlossenen Raum, in dem man ein physikalisches Experiment durchführen kann, wie z.B. das Fahrzeug, auch als Labor. Abstrakt wird ein Labor dann mit einem Koordinatensystem ausgestattet, sodass jeder Punkt des Labors eindeutig festgelegt ist. Auch das Universum kann in diesem Sinn ein Labor sein. Abstrakt gesprochen heißen Labore in der Sprache der Physik auch Bezugssysteme. Wenn sich ein Bezugssystem, wie z.B. ein Fahrzeug gleichförmig bewegt (d.h. mit konstanter Geschwindigkeit) und der Einfluss der Gravitation nicht berücksichtigt wird, dann bezeichnen es die Physiker auch als Inertialsystem. Die Spezielle Relativitätstheorie (SRT), beschäftigt sich nur mit physikalischen Vorgängen in Inertialsystemen und zwischen Inertialsystemen. Im folgenden stellen wir uns die Fortbewegungsmittel als Inertialsysteme vor. Zugleich stellen wir es mit einem Koordinatensystem aus. Ein Koordinatensystem im 3-dimensionalen Raum besteht im einfachsten Fall aus 3 aufeinander senkrecht stehenden Achsen x, y und z . Im folgenden betrachten wir Bewegungen auf einer geraden Linie entlang der x -Achse.

Newtonsches Relativitätsprinzip

Innerhalb eines abgeschlossenen Inertialsystemes ist es nicht feststellbar, ob sich das Inertialsystem gleichförmig bewegt oder ruht.

Wir werden den Wahrheitsgehalt dieser Aussage nun in den Kapiteln 1.1-1.6 mit zahlreichen Überlegungen überprüfen.

Aus ihren Grundgedanken heraus beschreibt die spezielle Relativitätstheorie physikalische Vorgänge unter der Berücksichtigung relativ dazu bewegter Inertialsysteme.

Ein wichtiges Arbeitsmittel das sehr gut zum Verständnis der speziellen Relativitätstheorie beitragen kann, sind Gedankenexperimente. Ein Gedankenexperiment ist ein gedankliches Konstrukt, bei dem man sich bestimmte physikalische Vorgänge vorstellt und diese im Rahmen gültiger physikalischer Gesetze theoretisch untersucht. Ich möchte mit einem einfachen gedanklichen Experiment beginnen, mit dem man

die Beschreibung der Änderung der Koordinaten bei Bewegungsvorgängen einfach vor das geistige Auge führen kann. Ich möchte nochmal speziell betonen, dass folgende Gesetzmäßigkeiten ein Relikt der Vor-Einsteinschen Ära sind. Die folgenden Transformationsgesetze sind nur in 1. Näherung richtig, nämlich dann wenn die Vorgänge sehr viel kleiner als mit Lichtgeschwindigkeit stattfinden.

Alice stehe auf einem Bahnsteig (Abbildung 1.1), während sich Bob in einem Zug mit konstanter Geschwindigkeit „ v “ von Ihr entfernt. Beide befinden sich in einem eigenen Inertialsystem. Alices Inertialsystem S (Koordinatensystem) bestehe aus den Koordinatenachsen x, y, z und Bobs Koordinatensystem S' , das fest mit dem Zug verbunden ist, bestehe aus den Achsen x', y' und z' . Wenn beide die Koordinaten eines Punktes P der sich im Zug befindet, beschreiben wollen, dann messen sie die Koordinaten jeweils vom Ursprung ihres eigenen Koordinatensystemes. Der Punkt P könnte z.B. auf der Sitzfläche eines Sitzes im Zug sein. Wir wollen die Bewegung der beiden relativ zueinander beschreiben. Die Strecke die Bob zurücklegt, ist gleich der Strecke $v \cdot t$.

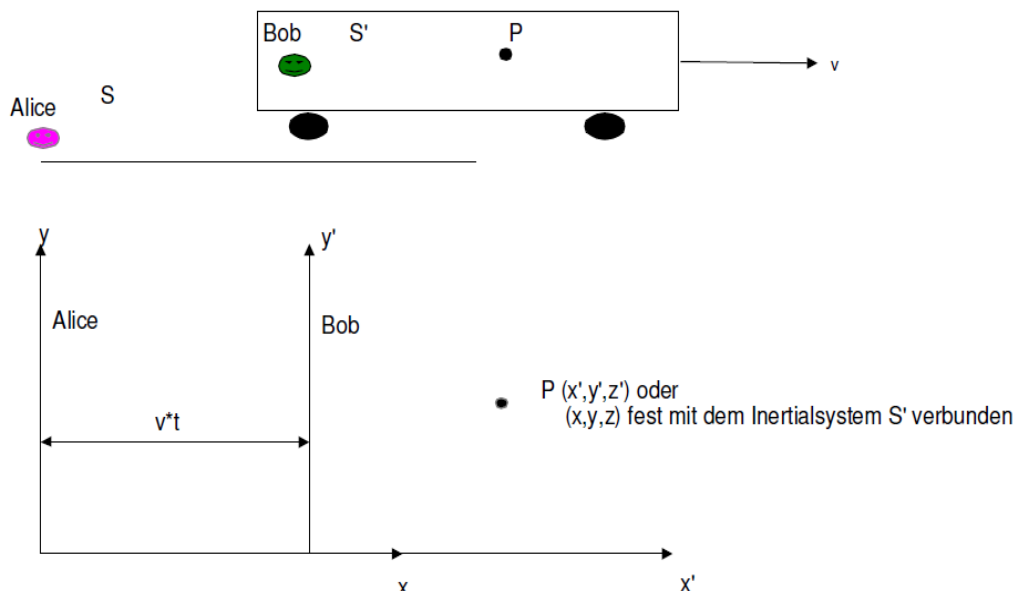


Abbildung 1.1: Relative Bewegung zweier Inertialsysteme in x -Richtung zur Erklärung der Galilei-Transformation

Ein wichtiger Punkt zum Verständnis ist hier die Tatsache, dass Bob in S' nur die „gestrichenen“ Koordinaten misst und Alice in S nur die „ungestrichenen“ Koordinaten des Bewegungsvorganges. Zur Umrechnung der Koordinaten, für die physikalische

Berechnung von Vorgängen im jeweils anderen Inertialsystem, gelten dann in diesem Fall die Galilei-Transformationen.

Galilei-Transformation (nach Galileo Galilei)

Bob misst seine „gestrichenen“ Koordinaten in S' , Alice ihre „ungestrichenen“ Koordinaten in S . Wenn Bob die x -Koordinate des Punktes P berechnen möchte, dann muss er zu seiner gemessenen x' -Koordinate den Wert der Wegstrecke $v \cdot t$ hinzurechnen. Mit dieser Grundüberlegung gelten also die Galilei-Transformationen zur Umrechnung von Koordinaten zwischen zwei Inertialsystemen folgendermaßen.

Für S' (Bob rechnet):

$$\begin{aligned} x &= x' + vt \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned}$$

(1.1)

Für S (Alice rechnet):

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}$$

(1.2)

Die Gleichungen (1.1) und (1.2) werden als Galilei-Transformation bezeichnet. Mit ihnen werden die Koordinaten zwischen Inertialsystemen ineinander umgerechnet, wenn sich die Inertialsysteme und die Bewegungsvorgänge in ihnen, mit sehr viel kleinerer Geschwindigkeit, als der Lichtgeschwindigkeit stattfinden. Der Umstand, dass die Zeit, die zwei Beobachter in verschiedenen Inertialsystemen messen, gleich ist, also $t=t'$, erschien den Physikern vor Einstein als unverrückbare Tatsache.

Im folgenden wollen wir untersuchen ob das Gesetz des freien Falles das Newtonsche Relativitätsprinzip erfüllt. Mit dem Gesetz des freien Falles kann die gefallene Strecke eines Körpers berechnet werden, wenn in erster Näherung, die Luftreibung vernachlässigt wird. Es bildet die Grundlage für die Berechnung sämtlicher Flugvorgänge. Es wird z.B. verwendet um die Flugweite von Geschossen zu berechnen. Man

kann es aber auch für folgendes Gedankenexperiment verwenden.

Bob befinde sich in einem Zug welcher sich mit Geschwindigkeit v von Alice entfernt. Bob jongliert einen Ball in seinem Abteil. Die Abbildung 1.2 zeigt den Vorgang aus Bobs Sicht. Der Ball fliegt in einer geraden Linie vertikal nach oben und wieder nach unten. Im Bild sind die Koordinatensysteme beider Beobachter dargestellt. Wir wollen den Vorgang des Ballfluges zunächst allein aus Bobs Sicht physikalisch beschreiben.

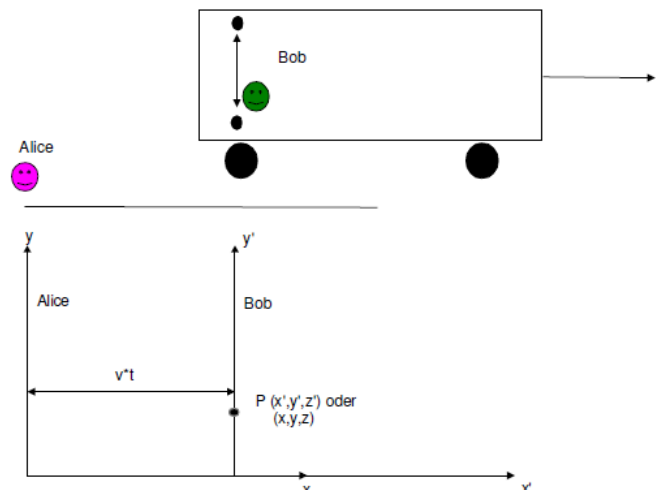


Abbildung 1.2: Gedankenexperiment zur Veranschaulichung des Newtonschen Relativitätsprinzips

Er beschreibt die Koordinaten der Bewegung des Balles folgendermaßen:

$x'=0$, weil die Bewegung des Balles nur in y' -Richtung stattfindet. Für die Bewegung in y' -Richtung gelten die Gesetze des freien Falles mit $y'=-0,5gt^2$, unter der Voraussetzung dass $t=t'$. Die Bewegung des Balles in y' -Richtung ist unabhängig von der Bewegung des Zuges in x' -Richtung. Wenn Alice die Flugbahn des Balles durch das Fenster des Zugabteils beobachtet, dann sieht der Vorgang für sie jedoch schematisch aus wie in Abbildung 1.3. Für Alice erscheint die Ballflugbahn alles andere als ein freier Fall zu sein. Die Bewegung des Balles gleicht einer parabelförmigen Flugbahn.

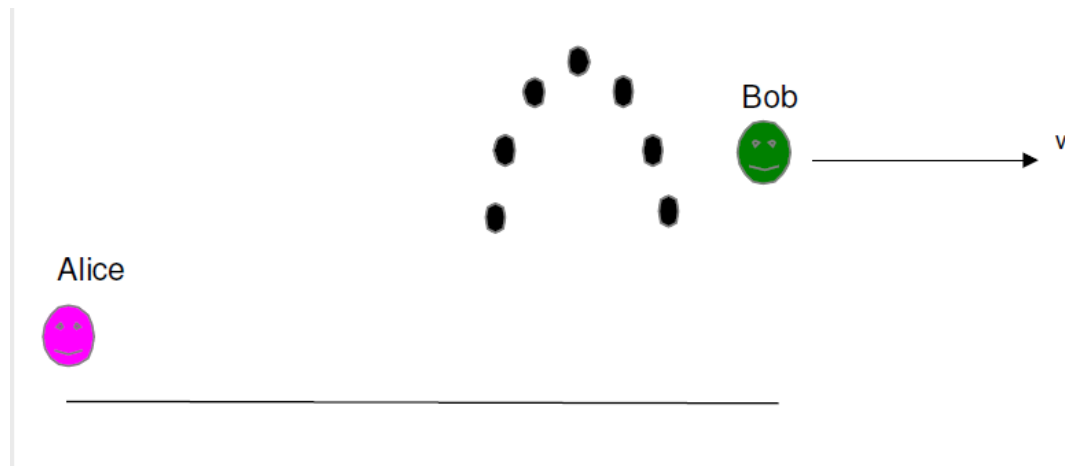


Abbildung 1.3: Gedankenexperiment zur Veranschaulichung des Newtonschen Relativitätsprinzips 2

Da sich der Zug mit Geschwindigkeit v bewegt, sieht Alice den Ball nicht in gerader Richtung nach oben fliegen. Sie rechnet für den Weg $x=vt$. Würde sie die Ballflugbahn auf einem y - x Schreiber darstellen, dann erhält sie in einem $y(x)$ Diagramm eine Kurve bei der die Werte für y direkt proportional zu x^2 sind. Nach einigen Versuchen wird sie herausfinden, dass $y(x)=-0,5g(x/v)^2$ für die Beschreibung des Vorganges gilt. Setzt man die obige Formel für x hier ein, dann erhält Alice $y(t)=-0,5gt^2$. Um zu überprüfen, ob die Galilei-Transformation zu den experimentellen Ergebnissen führt, kann Alice mit den Formeln aus (1.2) herausfinden, was in Bobs Inertialsystem S' passiert:

Da $y'=y$, kann sie die erste Formel in (1.2), nämlich $x'=x-vt$ in die gerade angegebene Funktion $y(x)$ einsetzen und berechnet damit dann $y'(x')=-0,5g((x-vt)/v)^2$. Speziell für $x=0$ erhält sie also $y'(t)=-0,5gt^2$, da $y'=y$ und $t'=t$.

Damit ist also gezeigt, dass das Newtonsche Relativitätsprinzip zu richtigen mathematischen Vorhersagen in diesem kinematischen Experiment führt.

1.2 Die Newtonschen Gesetze

Im Jahr 1687 veröffentlichte Isaac Newton seine „Philosophiae naturalis principia mathematica“ („Mathematische Prinzipien der Naturphilosophie“), in denen er die Mechanik und die Gravitationstheorie behandelt. Auf der Basis der Newtonschen Gesetze zur Mechanik, kann die gesamte Theorie zur klassischen Beschreibung physikalischer mechanischer Vorgänge aufgebaut werden. Diese berühmten Newtonschen Gesetze sind die kompakte Formulierung eines jahrhundertealten Erfahrungsschatzes, den die Physiker und Naturphilosophen, wie Galilei oder Newton, aus unzähligen Experimenten gewonnen haben. Ein Großteil aller mechanischen Vorgänge in der Natur und im Universum, können also in erster Näherung erfolgreich damit quantitativ berechnet werden. Jeder bisher beobachtete mechanische Vorgang ist auf der fundamentalsten Ebene seiner Beschreibung, sozusagen selbst der Beweis für die Gültigkeit dieser Gesetze.

Ausgangspunkt in der modernen Formulierung der Dynamik ist jedoch nicht der Kraftbegriff, sondern der Impuls, welcher der Geschwindigkeit eines Körpers multipliziert mit seiner (trägen) Masse entspricht:

$$\vec{p} = m_t \vec{v} = m \vec{v} \quad (1.3)$$

Wir wollen nun kurz die Originalformulierung der Newtonschen Gesetze, sowie die entsprechende physikalische Formulierung wie folgt zusammenfassen:

1. Lex prima : Inertialgesetz

„Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.“

„Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung (Translation), sofern er nicht durch einwirkende Kräfte zur Änderung seines Zustands gezwungen wird.“

In die Sprache der Physik übersetzt lautet dies:

$$\boxed{\vec{v} = \text{const. wenn } \vec{F} = \vec{0}} \quad (1.4)$$

Dies impliziert zusammen mit dem Superpositionsprinzip (s. S. 16, „Lex quarta“) die Gleichgewichtsbedingungen in der Statik:

$$\boxed{\vec{v} = \text{const. wenn } \sum \vec{F} = \vec{0} \text{ und } \sum \vec{M} = \vec{0}} \quad (1.5)$$

Es ergeben sich so zahlreiche Anwendungen u.a. im Brückenbau, Fahrzeugbau Schiffbau usw. .

2. Lex secunda: Newtonsches Trägheitsgesetz / Grundgleichung der Mechanik

„Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.“

„Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.“

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \sim \vec{F} \text{ , d. h. wenn } m = \text{const. , dann } m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{F} = m \vec{a}} \quad (1.6)$$

Ganz allgemein gültig kann man dieses mechanische Grundgesetz mit Hilfe des Impulses folgendermaßen schreiben

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \frac{\partial(m\vec{v})}{\partial t}} \quad (1.7)$$

Dieses Newtonsche Gesetz (1.7) wird auch als Grundgleichung der Mechanik bezeichnet. Es bildet die Grundlage der Beschreibung und Vorhersage aller mechanischen Bewegungsvorgänge (Dynamik) und zwar sowohl der auftretenden Kräfte, als auch der Bahnkurven massebehafteter Körper.

Erst im Falle, dass $m = \text{const.}$, ergibt sich dann

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \frac{\partial(m\vec{v})}{\partial t} = m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = m \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t^2} = m \vec{a}} \quad (1.8)$$

Um einen Körper zu beschleunigen, muss also eine Kraft auf ihn wirken. Diese Kraft ist der Beschleunigung proportional. Der Proportionalitätsfaktor ist dabei die träge Masse des zu beschleunigenden Körpers. Die träge Masse stellt also sozusagen einen Widerstand gegenüber der Beschleunigung dar. Je größer die Masse des Körpers desto größer der Widerstand den der Körper einer versuchten zeitlichen Bewegungsänderung (=Beschleunigung) entgegensetzt.

Die allgemeingültige Formulierung des Trägheitsgesetzes gemäß (1.7) bietet den Vorteil, dass der mathematische Apparat der Differentialrechnung darauf angewendet werden kann.

Wir wollen fiktiverweise einmal den Fall betrachten, dass die träge Masse m des Körpers selbst funktionell von der Geschwindigkeit v abhängt und diese wiederum von der Zeit t . Das bedeutet also $m=f(v(t))$. Die Gleichung (1.7) kann dann weiter ausgewertet werden, indem man die Produktregel- und die Kettenregel der Differentiation anwendet:

$$\vec{F} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \frac{\partial(m\vec{v})}{\partial t} = \frac{\partial m}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \vec{v} + m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad (1.9)$$

3. Lex tertia: Reaktionsprinzip

„Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.“

„Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper A auf einen anderen Körper B eine Kraft aus (actio), so wirkt eine gleich große, aber entgegen gerichtete Kraft von Körper B auf Körper A (reactio).“

$$\vec{F}_{AB} = - \vec{F}_{BA} \quad (1.10)$$

Daneben hat Newton ein weiteres Gesetz formuliert, das man nachträglich als lex quarta (4. Newtonsches Gesetz) bezeichnet hat. Es ist auch unter der Bezeichnung Superpositionsprinzip bekannt:

„Wirken auf einen Punkt (oder einen starren Körper) mehrere Kräfte in unterschiedliche Richtungen, so addieren sich diese unter spezieller Berücksichtigung der Wirkungsrichtungen (d. i. „vektoriell“) zu einer resultierenden Kraft auf.“

$$\boxed{\sum \vec{F}_{res} = \sum \vec{F}_i} \quad (1.11)$$

In Kombination mit dem 2. Newtonschen Gesetz (1.7), erhält man eine noch hilfreichere Formel:

$$\boxed{\sum \vec{F}_{res} = \sum \vec{F}_i = m \vec{a}} \quad (1.12)$$

Kombiniert man das 3. und 4. Newtonsche Gesetz, erhält man die Aussage, dass in einem geschlossenen System die Summe der Kräfte gleich Null ist, sofern man alle Reaktionskräfte berücksichtigt. Die Indizes i und j bezeichnen im folgenden die Nummerierung der beteiligten Körper:

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ij} + \sum \vec{F}_{ji} = \vec{0} \quad i \neq j} \quad (1.13)$$

Zusammen mit dem 2. Newtonschen Gesetz (1.7) kann man direkt den Impulserhaltungssatz ableiten:

$$\sum \vec{F}_{ij} = - \sum \vec{F}_{ji} \quad | \cdot dt$$

$$\sum \vec{F}_{ij} dt = - \sum \vec{F}_{ji} dt$$

Der Ausdruck Fdt entspricht einem sogenannten Kraftstoß und ist gemäß (1.7) identisch mit der zeitlichen Änderung des Impulses. Es gilt also für eine kleine zeitliche Differenz der Impulse

$$\boxed{\sum \Delta \vec{p}(\Delta t)_{ij} = - \sum \Delta \vec{p}(\Delta t)_{ji}} \quad (1.14)$$

Bei 2 Körpern A und B, vereinfacht sich dies zu:

$$\Delta \vec{p}(t)_{12} = - \Delta \vec{p}(t)_{21}$$

Der zweite Index kann hier entfallen, dann er gibt es

$$\vec{p}_1(t_2) - \vec{p}_1(t_1) = - (\vec{p}_2(t_2) - \vec{p}_2(t_1))$$

Dies kann man weiter umformen und erhält daraus, dass der Gesamtimpuls (Summe der Impulse) beider Körper zu einem beliebigen Zeitpunkt t_1 gleich ist dem Gesamtimpuls zu einem Zeitpunkt t_2 :

$$\vec{p}_1(t_2) + \vec{p}_2(t_2) = \vec{p}_1(t_1) + \vec{p}_2(t_1) \quad (1.15)$$

Eine entscheidende Eigenschaft der Newtonschen Gesetze ist es, dass sie invariant unter der Galilei-Transformation sind. Das bedeutet, dass sie sich nicht ändern, wenn man die Gleichungen (1.1) und (1.2) auf sie anwendet. Wir verdeutlichen das in einem weiteren Gedankenexperiment, das wir in aller Ausführlichkeit behandeln:

Nehmen wir nun an, dass der Punkt P der Punkt eines Türknaufes ist (Abbildung 1.4), an dem Bob mit der Kraft F' ziehen muss, damit er in ein anderes Zugabteil gehen kann.

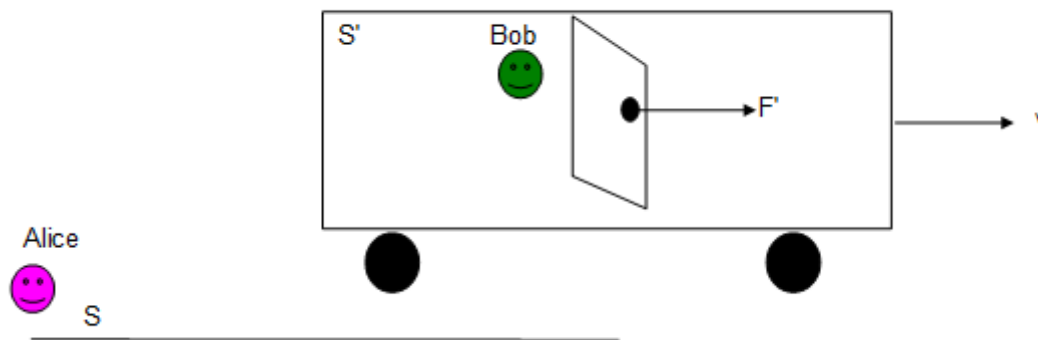


Abbildung 1.4: Gedankenexperiment zur Veranschaulichung der Invarianz der Newtonschen Gesetze unter einer Galilei-Transformation

Wenn das Newtonsche Relativitätsprinzip erfüllt ist, dann müsste sich die Tür für den bewegten Bob mit der gleichen Kraft F' öffnen lassen, wie wenn der Zug stünde, also, so als ob er die Tür des gleichen Zuges am Bahnsteig öffnen würde. Die Kraft die Bob ausüben muss, ist:

$$F' = ma' = \frac{m \partial^2 x'}{\partial t'^2} \quad (1.16)$$

Die Kraft die er im stehenden Zug ausüben muss, ist

$$F = ma = m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad (1.17)$$

Experimentell stellt man direkt fest, dass für kleine Geschwindigkeiten v , beide Kräfte gleich groß sind und damit $F(x) = F'(x')$ gilt.

Da das Newtonsche Relativitätsprinzip also experimentell gültig ist und der bewegte Bob im gleichförmig bewegten Zug (abgeschlossenes System) experimentell nicht unterscheiden kann, ob er sich gleichförmig gegenüber dem Bahnsteig bewegt oder ruht, muss die beschreibende Physik dieses Ergebnis anhand der richtigen Koordinatentransformationen vorhersagen können.

Wir überprüfen dies, indem wir die Galilei-Transformation zwischen den Koordinaten benutzen und die Kraft $F'(x')$ mittels (1.1), aus (1.17) berechnen. Wir verwenden hier auch, dass $t' = t$ und der Geschwindigkeitsvektor v konstant ist

$$F' = ma' = m \frac{\partial^2 x'}{\partial t'^2} = m \frac{\partial^2 (x - vt)}{\partial t^2} = m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = F \quad (1.18)$$

Es ist also offensichtlich richtig, dass sich die Tür in einem stehenden Zug genauso leicht öffnen lässt, wie in einem Zug der mit beliebig großer, konstanter Geschwindigkeit fährt. Das Ergebnis entspricht vollständig unserer Alltagserfahrung und dem experimentell bestätigten Newtonschen Relativitätsprinzip.

Diese Aussage ist natürlich nur dann richtig, wenn unsere Annahmen richtig sind, nämlich, dass das Newtonsche Gesetz ein gültiges physikalisches Gesetz ist, und dass die Galilei-Transformationen die richtigen Transformationsgesetze zwischen Inertialsystemen sind. Einstein zeigte jedoch, dass sowohl das Newtonsche Trägheitsgesetz, als auch die Transformationsgesetze für Koordinaten nicht vollständig sind wenn Vorgänge mit einer Geschwindigkeit stattfinden die nahe an der Lichtgeschwindigkeit liegt.

Ich möchte jetzt noch einen weiteren offensichtlichen mathematischen Zusammenhang besprechen, der sich unter der Galilei Transformation nicht ändert und eine herausragende Bedeutung für die physikalische Vektorrechnung der vorrelativistischen Physik hat.

1.3 Der Satz des Pythagoras der euklidischen Geometrie

Im dreidimensionalen Raum mit kartesischem Koordinatensystem ist die Länge einer Strecke Δs durch den Satz des Pythagoras in 3 Dimensionen, anhand der Koordinatenabstände berechenbar. Abbildung 1.5 zeigt diesen Zusammenhang:

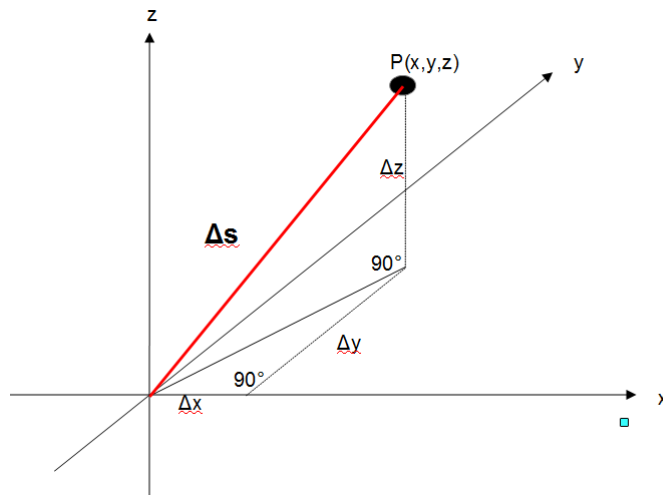


Abbildung 1.5: Veranschaulichung zum Satz des Pythagoras

Der Abstand zwischen Ursprung und Punkt P kann anhand der Koordinaten $\Delta x, \Delta y$ und Δz mit dem Satz des Pythagoras folgendermaßen berechnet werden:

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \quad \rightarrow \quad \Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \quad (1.19)$$

1.4 Die Invarianz des Wegelementes unter Galilei-Transformation

Die Länge von Maßstäben ist unabhängig von der Bewegung von Inertialsystemen. Bewegen sich zwei Inertialsysteme S und S' entlang der gemeinsamen x -Achse relativ zueinander mit Geschwindigkeit v , dann darf die Umrechnung der Koordinaten mittels Galilei-Transformation nicht zu anderen Ergebnissen als die Längenmessung führen. Wir machen uns das anhand von Abbildung 1.6 klar. Die rote Linie stellt die Länge eines Maßstabes dar.

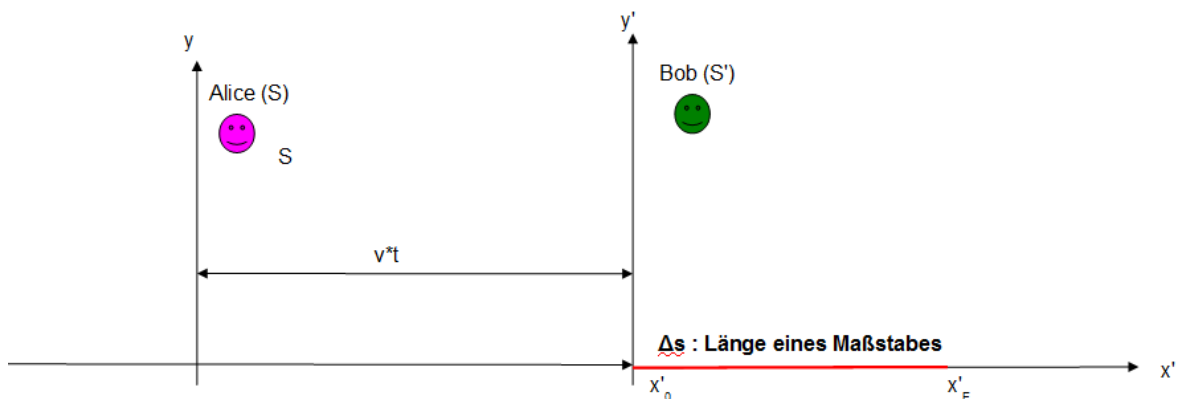


Abbildung 1.6: Invarianz des Wegelementes unter Galilei-Transformation

$$\text{Bob (S')}: \Delta s' = x'_E - x'_0$$

Bob wendet die Galilei-Transformation (1.1) an um die Länge Δs in Alice System S zu berechnen:

$$\Delta s = x'_E + vt - (x'_0 + vt) = \Delta s'$$

Die Galilei-Transformation zeigt also, dass das räumliche Wegelement tatsächlich unabhängig von der konstanten Relativgeschwindigkeit ist, so wie es auch unserer Alltagserfahrung entspricht. Wir werden jedoch sehen, dass dies keineswegs so trivial ist, wie es zunächst den Anschein hat. Einstein konnte zeigen, dass der rein räumliche Abstand bei sehr hohen Relativgeschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit

keit, keine invariante Größe unter der Galilei-Transformation ist und dass dies auch experimentell bestätigt wird.

Wir zeigen nun, dass sich die klassische Invarianz des Wegelementes nicht nur bei konstanter Relativbewegung mittels der Galilei-Transformation berechnen lässt, sondern auch, dass das Wegelement unabhängig von einer statischen Verdrehung zweier Inertialsysteme ist. Dies ist auch essentieller Bestandteil für die Vektorrechnung mit physikalischen Vektoren und findet dort seinen Ausdruck im Skalarprodukt, welches ebenfalls invariant gegenüber der statischen Verdrehung von Koordinatensystemen ist.

Wir betrachten Abbildung 1.7 und stellen uns vor, dass die rote Strecke Δs die Länge eines Stabes darstellt, der sich in einem Laborsystem S befindet. Würden wir nun das Laborsystem um einen Winkel Θ drehen, sodass es zu S' wird, dann darf die Berechnung von Δs anhand der neuen Koordinaten x' , y' und z' , sich nicht auf die Länge von Δs auswirken.

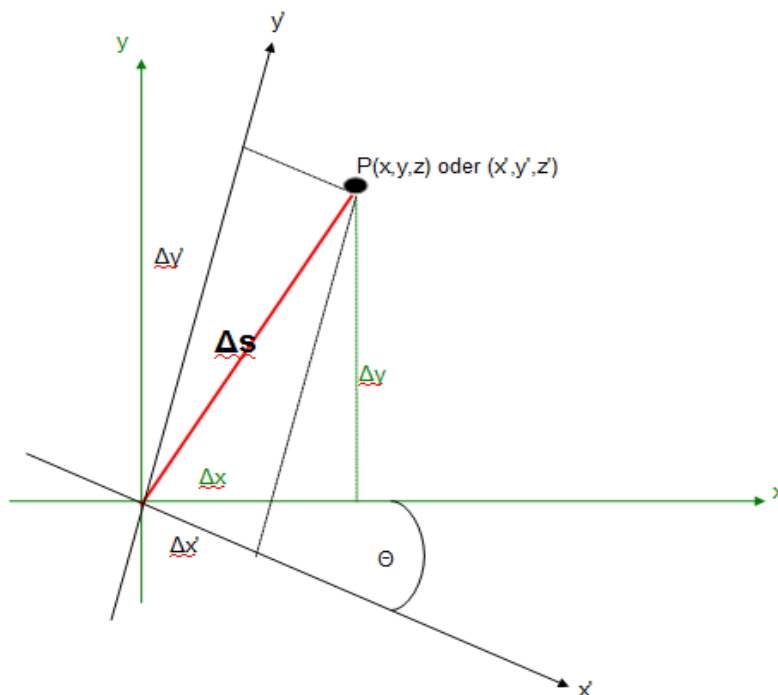


Abbildung 1.7: Invarianz des Wegelementes bei statischer Verdrehung zweier Inertialsysteme

Man erhält für die Beziehungen zwischen den „alten ungestrichenen“ und „neuen gestrichenen“ Koordinaten, folgende Zusammenhänge die wir ohne Herleitung angeben, da sie für die folgenden physikalischen Zusammenhänge nicht entscheidend ist und in jedem brauchbaren Buch zur Vektorgeometrie nachgelesen werden kann:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \Theta - y \sin \Theta \\y' &= y \cos \Theta + x \sin \Theta \\z &= z'\end{aligned}\tag{1.20}$$

Setzt man nun die Formeln aus (1.20) in (1.19) ein, dann erhält man bei Anwendung der Additionstheoreme der Trigonometrie tatsächlich das erwartete Ergebnis:

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 = \Delta s'^2\tag{1.21}$$

$$\Delta s = \Delta s'$$

Wir fassen also zusammen, dass Längen von Wegstrecken invariant gegenüber dem Wechsel zwischen statisch verdrehten Koordinatensystemen sind.

1.5 Die klassische Transformation und Addition von Geschwindigkeiten

Wir nutzen einfach wieder unser „Bahnsteig-Zug Experiment“. Alice befinde sich auf dem Bahnsteig während Bob in einem Zug mit Geschwindigkeit v sich von ihr entfernt. Alice hat ihr Koordinatensystem x,y,z und Bob x',y',z' . In Bobs Zugabteil fährt ein Spielzeugauto im Mittelgang umher. Das Auto fährt zunächst einfach relativ zu Bob mit der Geschwindigkeit u' ebenfalls in x -Richtung (Abbildung 1.8).

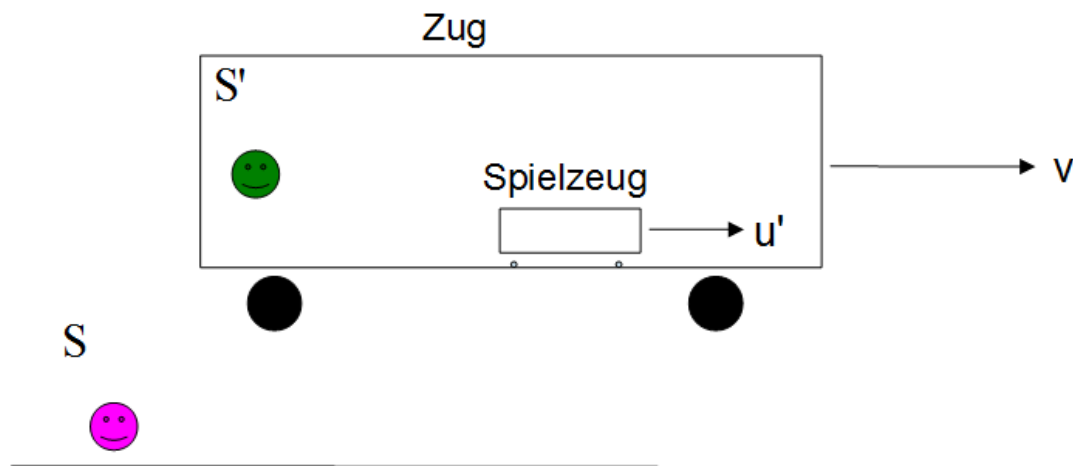


Abbildung 1.8: Gedankenexperiment zur klassischen Geschwindigkeitsaddition

Ein Punkt P der sich auf dem fahrenden Spielzeug befindet hat dann für Bob die Koordinate $x'=u't$ (unter der Voraussetzung dass das Auto sich zur Zeit $t=t'=0$ bei $x'=0$ befindet). Für die Änderung der x' Koordinate gilt damit für Bob: $dx'=u'dt$. Wie lässt sich nun jedoch die Geschwindigkeit aus den im eigenen Inertialsystem erhaltenen Messwerten für die Koordinaten, für das andere Inertialsystem berechnen? Wir beschäftigen uns zunächst mit Bob:

Bob in S' errechnet für die von Alice festgestellte Geschwindigkeit anhand der Relativgeschwindigkeit v und seiner gemessenen Koordinaten x' , y' und z' , mit Hilfe der Galilei-Transformation (1.1) für u folgendermaßen:

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial(x' + vt)}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} + v = u' + v \quad (1.22)$$

Alice kann ebenfalls die Geschwindigkeit u' errechnen, indem sie die Galilei-Transformation (1.2) auf ihre Messwerte (x, y, z) anwendet:

$$u' = \frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{\partial(x - vt)}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} - v = u - v \quad (1.23)$$

Es ergibt sich einfach eine lineare Superposition der Geschwindigkeiten und nichts hindert diese Berechnungsformeln daran, dass für die Geschwindigkeit u des Spielzeuges, auch Geschwindigkeitsbeträge entstehen, die größer als die Lichtgeschwindigkeit sind.

Es sei vorab darauf hingewiesen, dass die Formeln (1.22) und (1.23) nur für kleine Geschwindigkeiten $u, v \ll c$ mit der Realität und damit dem experimentellen Befund übereinstimmen.

Wie bereits im letzten Beispiel gezeigt, hat die Superposition von Geschwindigkeiten eine zentrale Bedeutung in der klassischen Physik. Diese ist sogar für den dreidimensionalen Raum erweiterbar, wenn man die vektorielle Addition (Superposition) von Geschwindigkeitsvektoren anwendet. Wir wollen uns die zweidimensionale Überlagerung in Abbildung 1.9 im Detail ansehen.

Bob möchte Alice imponieren und einen Fluß durchschwimmen, der mit Geschwindigkeit v (man beachte den Vektorcharakter von v) fließt, während Alice am Ufer bleibt. Bob selbst startet in gerader Richtung um den kürzesten Weg durch den Fluss zu nehmen. Seine Geschwindigkeit bezeichnen wir mit c und dieser Vektor steht senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor des Flusses v .

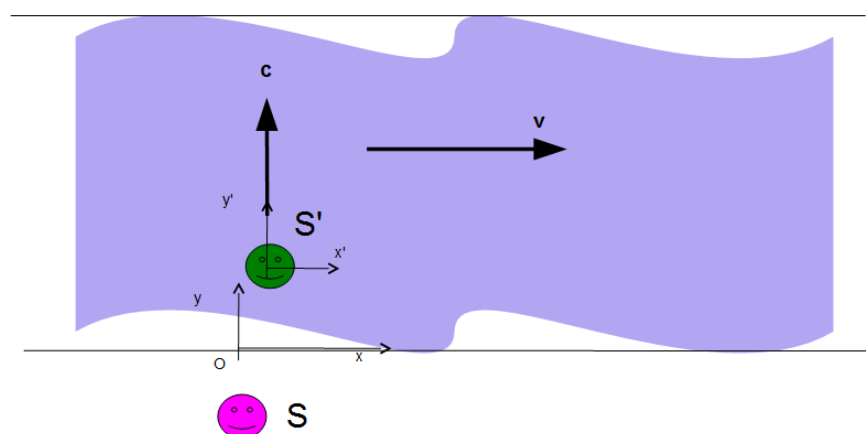


Abbildung 1.9: Gedankenexperiment zur klassischen Geschwindigkeitsaddition

Bob wird also aufgrund der Überlagerung der Geschwindigkeiten abgetrieben und landet nicht direkt gegenüber von Alice am anderen Ufer an (Abbildung 1.10). Statt bei A anzukommen wird er wegen der Fließgeschwindigkeit v um die Strecke Δx abgetrieben und „landet“ bei B am anderen Ufer. Wir stellen uns vor dass Alice mit dem Inertialsystem S verbunden ist und Bob mit dem Inertialsystem S' . Bob startet vom Ursprung O von Alice's Koordinatesystem aus.

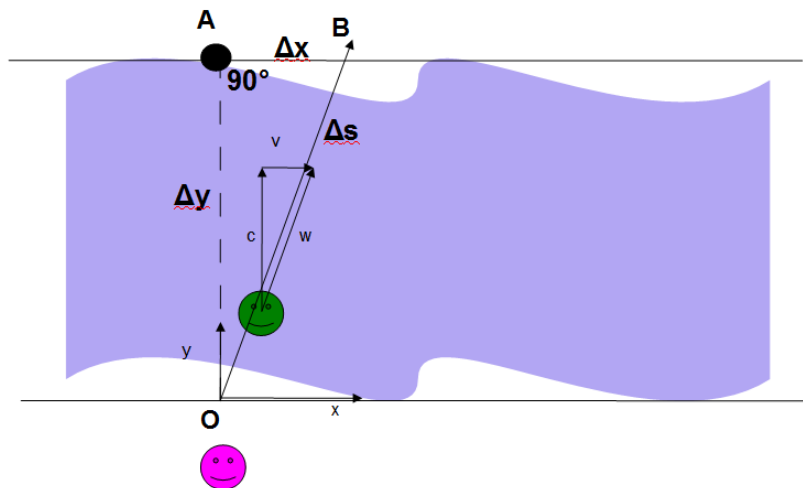


Abbildung 1.10: Gedankenexperiment zur klassischen Geschwindigkeitsaddition

Während der gesamten Bewegung gilt für Bob: $x'=0, y'=0$ und $z'=0$. Alice beschreibt den Bewegungsvorgang von Bob als eine Überlagerung der Schwimmgeschwindigkeit von Bob c , mit der Fließgeschwindigkeit des Flusses v :

$$\begin{aligned} x &= vt \\ y &= ct \end{aligned} \tag{1.24}$$

Aus der Zeichnung erkennt man, dass für den gesamten zurückgelegten Weg Δs , Alice den Satz des Pythagoras anwenden kann:

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{v^2 \Delta t^2 + c^2 \Delta t^2} = \Delta t \sqrt{v^2 + c^2} \tag{1.25}$$

Mit Δt ist die Zeit gemeint, die Bob für die Überquerung des Flusses braucht. Die resultierende Geschwindigkeit w ergibt sich aus der Division des Gesamtweges Δs mit der benötigten Zeit Δt :

$$w = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{v^2 + c^2} \quad (1.26)$$

Aus (1.25) und (1.26) kann man folgenden nützlichen Zusammenhang herleiten, der uns in einem späteren Kapitel noch einmal begegnen wird (nämlich bei der Auswertung des Michelson Morley Experimentes). Für den Zeitpunkt $t=t_B$, wenn Bob den Punkt B erreicht gilt nämlich damit

$$w^2 t_B^2 = \Delta y^2 + v^2 t_B^2$$

Die Zeit, die Bob vom Ursprung von Alice Koordinatensystem O bis zum Punkt B braucht ist deshalb für Alice

$$t_B = \frac{\Delta y}{\sqrt{w^2 - v^2}} = \frac{\overline{OA}}{\sqrt{w^2 - v^2}} \quad (1.27)$$

Zusammenfassung:

1. Für $u, v \ll c$ führt das nicht-relativistische Trägheitsgesetz (2. Newtonsches Gesetz) (1.7) auf korrekte Bewegungsgleichungen für ungeladene Körper der trägen Masse m .
2. Für $u, v \ll c$ sind die Galileitransformation (1.1), (1.2) und die klassische Geschwindigkeitsaddition zwischen Inertialsystemen korrekt.

Die Ideen, die zur Entwicklung der Relativitätstheorie geführt haben, wurden hauptsächlich durch Experimente mit Licht gewonnen. Die Widersprüche der etablierten Bewegungsgesetze, mit den Versuchsergebnissen, welche die Bewegung des Lichts erklären sollten, führten dazu, dass neue Vorstellungen entwickelt werden mussten. Nachdem man Licht als elektromagnetisches Phänomen identifiziert hatte, ging man davon aus, elektromagnetische Wellen ähnlich wie Schallwellen beschreiben zu können. Die Physiker wussten jedoch noch nicht, dass es entscheidende Unterschiede zwischen beiden gibt. Bevor wir uns nun jedoch mit den Schwierigkeiten und Widersprüchen, die bei der Beschreibung der Lichtausbreitung aufgetaucht sind, beschäftigen, wollen wir uns nochmal mit der damals etablierten mechanischen Bewegungstheorie anhand von Schallwellen auseinandersetzen.

1.6 Die Ausbreitung von Schall und der akustische Dopplereffekt

Schallwellen sind eine Form von mechanischen Wellen. In Gasen breiten sich periodische Druckschwankungen (Schwingungen) räumlich als Schallwellen aus. Im Bild 1.11 wird eine Schallwelle durch die Schwingung der Membran erzeugt. Die Schwingung der Membran mit zeitlicher Periode T überträgt sich auf die Luftmoleküle an der Grenzschicht zur Membran. Von dort erfolgt eine harmonische Anregung weiterer Luftmoleküle und die Welle pflanzt sich mit räumlicher Periode (= Wellenlänge) λ und der Schallgeschwindigkeit c_{gas} fort. Wir werden die Thematik der mechanischen Wellen, zu denen auch die Schallwellen gehören nur insoweit erörtern, wie es dem Verständnis der Grundlagen der Relativitätstheorien zuträglich ist. Für eine detaillierte Darstellung sei der Leser z.B. auf [1] verwiesen.

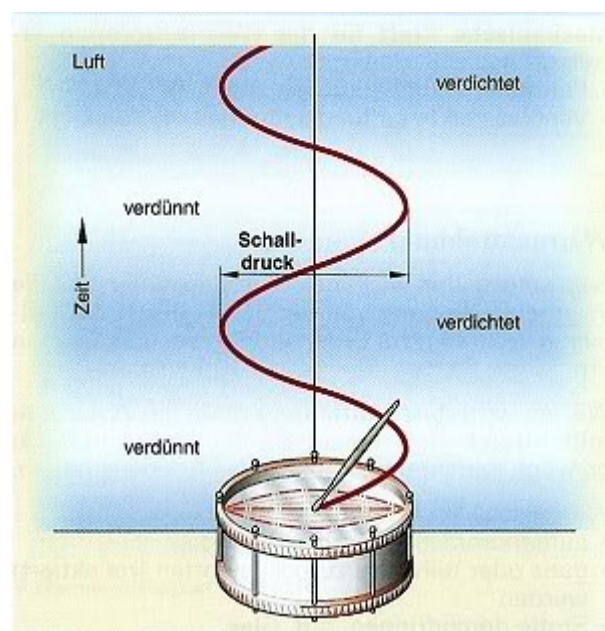


Abbildung 1.11: Anregung einer Schallwelle durch die Schwingung der Membran einer Trommel

Diese wellenartige Ausbreitung des Schalles kann mathematisch beschrieben werden, indem man die sogenannte Euler-Gleichung für den Schalldruck löst. Wir wol-

len hier auf eine mathematische Herleitung dieser partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung verzichten und geben sie in eindimensionaler Formulierung an:

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}} \quad (1.28)$$

Der Vorfaktor enthält die Konstante c , welche die sogenannte Schallgeschwindigkeit ist. Sie entspricht der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schallwelle.

Für jede beliebige Wellenausbreitung gilt der sehr wichtige Zusammenhang, dass sich die Welle innerhalb einer zeitlichen Dauer $t=T$ (Periodendauer) um die Wellenlänge λ (räumliche Periode=Abstand zweier Wellenberge) mit ihrer charakteristischen Ausbreitungsgeschwindigkeit c in Ausbreitungsrichtung ausbreitet. Die zeitliche Dauer der Schwingung wird dabei durch die Periodendauer T gekennzeichnet, welche wiederum gleich dem Kehrwert der Frequenz f ist:

$$\boxed{\lambda = cT = \frac{c}{f}} \quad (1.29)$$

Die folgende Funktion stellt eine Lösung der Gleichung (1.28) dar. Sie beschreibt die wellenartige Ausbreitung des Schalldruckes in x -Richtung:

$$\boxed{p(x, t) = p_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{c}\right)\right)} \quad (1.30)$$

Gase können schwingungsartigen Scherkräften keinen elastischen Widerstand entgegensetzen, sondern effektiv nur komprimiert und expandiert werden. Deshalb breiten sich Schallwellen in Gasen in die gleiche Richtung aus, in denen die Druckschwingung stattfindet. Man nennt solche Wellen auch Longitudinalwellen.

Etwas verblüffend ist, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schallwellen allein durch thermische- und mechanische Eigenschaften des Gases berechnet werden können:

$$\boxed{c_{gas} = \sqrt{\frac{c_p p}{c_v \rho}}} \quad (1.31)$$

Hierin sind p der Luftdruck, c_v die Wärmekapazität bei konstantem Volumen, c_p die Wärmekapazität der Luft bei konstantem Druck und ρ die Dichte der Luft. Setzt man

hier die Normbedingungen ein, dann erhält man einen Wert für die Schallgeschwindigkeit c_{gas} von ca. 330 m/s.

Die Schallgeschwindigkeit c_{gas} ist also unabhängig von der Geschwindigkeit der Schallquelle. Schall benötigt ein Medium (Fluid, Gas, Festkörper) um sich ausbreiten zu können. Schall kann sich nicht im Vakuum ausbreiten. Es gibt deshalb keine hörbaren „Crashes“ im Weltraum.

Aufgrund der wellenartigen Ausbreitung und der vom Ausbreitungsmedium definierten Geschwindigkeit, kommt es zu einigen Phänomenen, die uns zunächst erstaunen. Wir wollen uns hier eingehender dem sogenannten Doppler-Effekt zuwenden.

Der Doppler-Effekt beschreibt die Stauchung oder Dehnung der zeitlichen Differenz des Eintreffens von Signalen, wenn sich Sender und Empfänger, relativ zueinander bewegen. Dies betrifft sowohl Schallwellen, als auch elektromagnetische Wellen (also Licht, Radiowellen, usw.). In einem simplen analogen Fall aus der klassischen Mechanik, stelle man sich ein Spiel mit 2 Spielern vor, bei dem einer von Ihnen der unbewegte Werfer ist und der Fänger sich auf den Werfer zu- oder wegbewegt, während der Werfer ihm einen Ball zuwirft. Man stelle sich vor, dass der unbewegte Werfer jede Sekunde einen Ball (1 Hz) zum Fänger wirft, welcher zunächst auch stillstehen möge. Die Entfernung zwischen Werfer und Fänger betrage 1m, und die Fluggeschwindigkeit des Balles 1 m/s. Der so unbewegte Fänger wird jede Sekunde (1 Hz) einen Ball fangen.

Nun soll sich der Fänger mit 1 m/s entfernen. In diesem Fall wird er einen Ball alle 2 Sekunden (0,5 Hz) fangen. Seine „Fangfrequenz“ hat sich also gegenüber der „Wurffrequenz“ verändert. Dies ist ein analoges Beispiel für den Doppler-Effekt.

Wir wollen uns zunächst mit dem klassischen Doppler-Effekt für Schallwellen beschäftigen. Dieser wurde vom österreichischen Mathematiker und Physiker Christian Doppler bereits 1842 entdeckt.

In Abbildung 1.12 bewegt sich ein Rettungswagen mit eingeschaltetem Martinshorn auf eine Person zu. Es ist zu erkennen, dass sich die Wellenfronten der Schallwelle in Fahrtrichtung stauchen, während sie in der entgegengesetzten Richtung auseinandergezogen werden. Dies wirkt sich hörbar auf die Tonhöhe (welche der Frequenz entspricht) aus, sodass der Ton höher ist während das Martinshorn auf einen zurast, während der Ton deutlich niedriger ist wenn das Martinshorn sich entfernt.

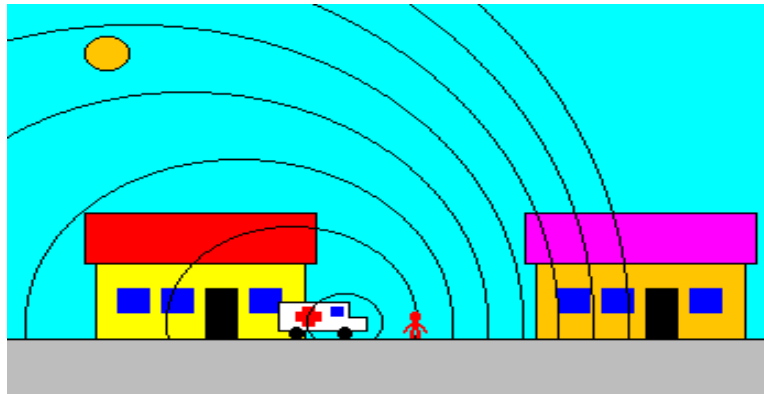


Abbildung 1.12: Schematische Darstellung zum Doppler-Effekt [6]

Wir wollen den Doppler-Effekt für Schallwellen jetzt mathematisch herleiten. Danach wollen wir testen, ob die gewonnenen Gesetzmäßigkeiten mit der Galilei-Transformation verträglich sind und sich die Vorgänge mit Schall, tatsächlich richtig mit der klassischen Geschwindigkeitsaddition berechnen lassen.

Die Tonhöhe von bewegten Schallquellen/Sendern (Abkürzung: „S“) ändert sich für einen Empfänger („E“). Für die Frequenz der Schallquelle gilt $f_s = c_{\text{gas}} / \lambda_s$. Für den Empfänger $f_E = c_E / \lambda_E$.

Wir betrachten nun 2 separate Fälle und kombinieren diese dann zu einer allgemeingültigen Formel.

1. Fall: Bewegte Schallquelle (ruhendes Medium)

Bewegt sich S auf E zu, so entspricht dies einer Verkürzung der Wellenlänge λ_s um den Weg Δx , den S während der Dauer einer Schwingung zurücklegt. In vorstehender Beziehung gilt für die Wellenlänge die der Empfänger erhält

$$\lambda_E = \lambda_S - \Delta x = \lambda_S - \frac{v_S}{f_S} \quad (1.32)$$

v_s ist die Geschwindigkeit der Schallquelle relativ zum Medium, welchem hier die ruhende Luft entspricht.

Man weiß aus zahlreichen Experimenten und der Bestätigung von (1.31), dass die Geschwindigkeit von Schall nicht von der Bewegung der Schallquelle gegen das Medium abhängen kann. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c_{gas} ist von den Parametern des Mediums festgelegt und unabhängig von der Geschwindigkeit der Quelle.

2. Fall: Bewegter Empfänger

Gleichzeitig besteht nun noch die Möglichkeit, dass sich der Empfänger E von der Schallquelle S entfernt. Gemäß der klassischen Geschwindigkeitsaddition (1.22, 1.23) ändert sich dadurch die Geschwindigkeit, mit der er die Schallwelle wahrnimmt. Klassisch: $c_E = c_{\text{gas}} - v_E$.

Setzt man diese Formeln in den obigen Zusammenhang (1.32) ein, erhält man unter Verwendung von (1.29)

$$f_E = \frac{c_{\text{gas}} - v_E}{\lambda_S - \frac{v_S}{f_S}} = f_S \frac{c_{\text{gas}} - v_E}{c_{\text{gas}} - v_S} \quad (1.33)$$

Drückt man dies wiederum mit (1.29) durch die Wellenlängen aus, so gilt

$$\lambda_E = \lambda_S \frac{c_{\text{gas}} - v_S}{c_{\text{gas}} - v_E} \quad (1.34)$$

Die Formeln in (1.33) und (1.34) decken alle erdenklichen Fälle ab, wenn:

- v_s und v_E die Geschwindigkeiten von Sender und Empfänger relativ zum Medium sind
- für das Vorzeichen von v_s und v_E gilt, dass Bewegungen in Richtung der Schallwelle positiv sind und umgekehrt

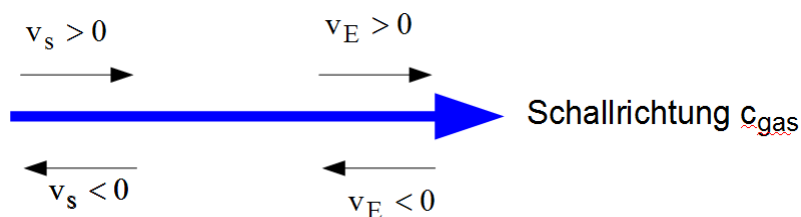


Abbildung 1.13: Vorzeichenregeln zur Berechnung des Doppler-Effektes

Sind die Geschwindigkeiten v_S und v_E sehr klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit im Gas c_{gas} , dann kann (1.33) vereinfacht werden

$$f_E = f_S \left(1 + \frac{\Delta v}{c_{\text{gas}}} \right) \quad (1.35)$$

Die klassische Geschwindigkeitsaddition bei der Ausbreitung von Schall

Die Schallgeschwindigkeit c_{gas} wird allein durch die Eigenschaften des Mediums (z.B. Gas) festgelegt. Auch ist sie unabhängig von der Geschwindigkeit der Schallquelle. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die Schallgeschwindigkeit auch unabhängig vom Bewegungszustand des Mediums (z.B. Gegenwind) ist.

Zudem lässt sich experimentell zeigen, dass sich zwischen geschlossenen bewegten Inertialsystemen die Geschwindigkeiten klassisch, mittels Galilei-Transformation (1.1) und (1.2) ergeben.

Wir wollen beide Fälle mit Gedankenexperimenten veranschaulichen.

Sehen wir uns dazu zunächst Abbildung 1.14 an. Sendet eine Schallquelle ein Signal ins Medium und bewegt sich das Medium selbst, so addieren sich beide Geschwindigkeiten klassisch, zu einer resultierenden Geschwindigkeit.

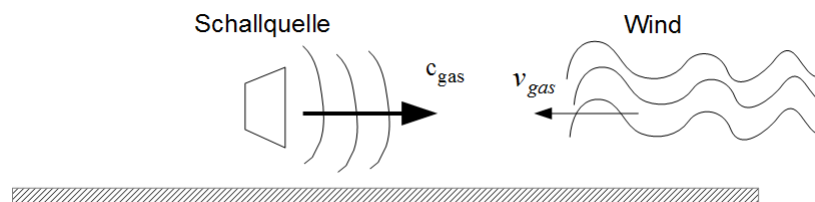


Abbildung 1.14: Klassische Geschwindigkeitsaddition bei Schall

Durchsetzt das Ausbreitungsmedium (z.B. Luft) den Ort von S und E und bewegt sich das Medium ebenfalls mit Geschwindigkeit v_{gas} , dann gilt für die Schallgeschwindigkeit wegen der Geschwindigkeitsaddition

$$c = c_{\text{gas}} + v_{\text{gas}} \quad (1.36)$$

v_{gas} ist positiv in Richtung der Schallwelle und negativ, entgegen der Richtung der Schallwelle.

Wir sehen uns nun ein weitaus aufwändigeres Experiment an (Abbildung 1.15), mit dem man die klassische Geschwindigkeitsaddition und die Galilei-Transformation für die Schallausbreitung und den Doppler-Effekt testen kann. Wir kombinieren dazu unser bekanntes „Bahnsteig-Zug Experiment“ der letzten Abschnitte, mit der Vorrichtung in Abb. 1.14. In erster Näherung vernachlässigen wir die direkte Übertragung des Schalles zum Beobachter auf dem Bahnsteig durch die Wände des Zuges. Alle Vorgänge im Zug (S') werden in S' mit „gestrichenen“ Koordinaten beschrieben. Der Beobachter am Bahnsteig (S) nutzt zur Berechnung der Vorgänge in S' seinen gemessenen „ungestrichenen“ Koordinaten.

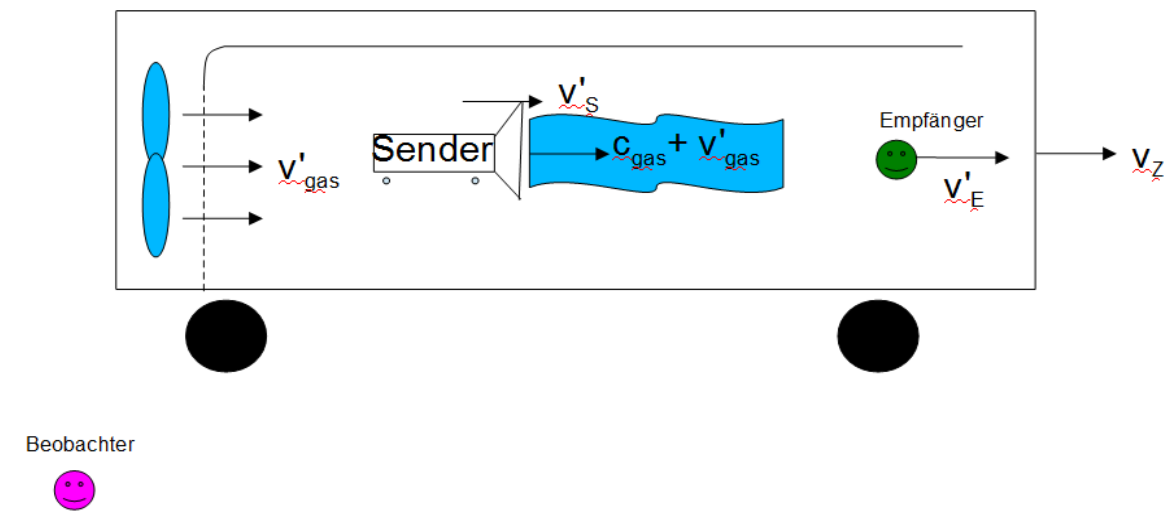


Abbildung 1.15: Experiment zur Überprüfung des Doppler-Effektes unter Anwendung der klassischen Geschwindigkeitsaddition

Der Empfänger im Zug erhält mit (1.36) und (1.33) für die empfangene Frequenz (da $c'_{\text{gas}} = c_{\text{gas}}$ gemäß 1.31 nur von den thermodynamischen Parametern des Mediums abhängt)

$$f'_E = f'_S \frac{c_{\text{gas}} + v'_{\text{gas}} - v'_E}{c_{\text{gas}} + v'_{\text{gas}} - v'_S} \quad (1.37)$$

Der Beobachter am Bahnsteig will nun f'_E aus den von ihm gemessenen Geschwindigkeiten berechnen („ungestrichene“ Größen). Er muss dazu die Geschwindigkeit des Zuges v_Z beachten und die klassische Geschwindigkeitsaddition (1.23) anwenden:

$$\begin{aligned} v'_{gas} &= v_{gas} - v_Z \\ v'_S &= v_S - v_Z \\ c' &= c_{gas} + v_{gas} - v_Z \end{aligned} \tag{1.38}$$

$$v'_E = v_E - v_Z$$

Zudem wollen wir die direkte Übertragung des Schalles durch die Wände zum Beobachter B unberücksichtigt lassen und setzen $f_S = f_{SB}$. Setzt man diese Zusammenhänge in (1.37) ein, dann folgt

$$f'_E = f'_S \frac{c_{gas} + v_{gas} - v_Z - (v_E - v_Z)}{c_{gas} + v_{gas} - v_Z - (v_S - v_Z)} = f'_S \frac{c_{gas} + v_{gas} - v_E}{c_{gas} + v_{gas} - v_S} = f'_S \frac{c_{gas} + v'_{gas} - v'_E}{c_{gas} + v'_{gas} - v'_S} \tag{1.39}$$

Wir erhalten also das gleiche Ergebnis wie mit (1.37). Die experimentellen Ergebnisse bestätigen diese Berechnung und damit ist gezeigt, dass das Doppler-Gesetz mit der klassischen Geschwindigkeitsaddition verträglich ist.

Würde die Rechnung unterschiedliche Ergebnisse erzeugen, dann würde das aussagen, dass ein Experiment so gestaltet werden könnte, dass der Empfänger im Zug (abgeschlossenes System) feststellen könnte, dass sich der Zug gleichförmig bewegt oder ruht. Dies ist jedoch nicht der Fall! Somit ist das Newtonsche Relativitätsprinzip auch für Schallwellen gültig.

1.7 Licht als elektromagnetische Welle im Vakuum

In der Theorie elektromagnetischer Felder, wie sie von Maxwell beschrieben werden, wird die Lichtausbreitung, ähnlich zur Ausbreitung von Schallwellen formuliert. Licht wird in diesem physikalischen Modell als elektromagnetische Welle interpretiert. Schwingungen der elektrischen- und magnetischen Feldgrößen breiten sich nach dieser Theorie periodisch im Raum aus. Die Frequenz der Welle entspricht dem Betrag der Geschwindigkeit mit der sich die Feldgrößen ändern. Im Fall der elektromagnetischen Wellen, legen diese in einem ganz bestimmten Frequenzbereich, die Farben des sichtbaren Lichtes fest. Die Wellenlänge ist die räumliche Entfernung, nach der sich ein Schwingungszustand wiederholt. Frequenz und Wellenlänge hängen für jede Welle gemäß (1.29) mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c , der jeweiligen Welle mathematisch zusammen.

Die 4 Maxwellschen Gleichungen (James Clerk Maxwell ca. 1861-1864) bilden die mathematische Essenz für die Beschreibung der Phänomene der Elektrizität, des Magnetismus und des Lichtes. Wir wollen diese kurz ohne Herleitung angeben:

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\
 \text{div } \vec{D} &= \rho_{el} \\
 \text{div } \vec{B} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1.40}$$

Kombiniert man die ersten beiden Maxwellgleichungen und zwar in der vereinfachten Form im materiefreien Raum, so erhält man für die Ausbreitung des elektrischen Feldes E in x -Richtung, eine Wellengleichung analog zur Gleichung (1.28), die wir für Schallwellen erhalten haben:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}
 \tag{1.41}$$

Dies ist eine Gleichung, welche die wellenartige, raum-zeitliche Ausbreitung des elektrischen Feldstärkevektors E beschreibt. Aus ihr folgt die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser Feldstärkeänderung im Vakuum. Die Werte der elektrischen- und magnetische Feldkonstanten (ϵ_0 und μ_0) waren aus Messungen bereits bekannt und so konnte die Ausbreitungsgeschwindigkeit c berechnet werden:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299792458 \frac{m}{s} \quad (1.42)$$

Dieser errechnete Wert stimmte für die damaligen Physiker erstaunlich gut mit den Messwerten für die Lichtgeschwindigkeit überein. Aus dieser Tatsache schlussfolgerte bereits Maxwell 1865 vollkommen richtig:

„Diese Geschwindigkeit ist so nahe an der gemessenen Lichtgeschwindigkeit, so dass wir einen starken Grund zu der Annahme haben, dass das Licht selbst (einschließlich Wärmestrahlung und anderer Strahlung, falls es sie gibt), eine elektromagnetische Welle ist.“

Um diese Behauptung zu beweisen, war es für die Physiker Ende des 19. Jahrhunderts nun wichtig, das Trägermedium in dem sich Licht (und damit elektromagnetische Wellen) ausbreitet zu finden. Jede Welle benötigte bis zu diesem Zeitpunkt ein Medium, um sich überhaupt ausbreiten zu können. Bei Schall wusste man, dass das Trägermedium die Luft ist. Bei den elektromagnetischen Wellen wusste man jedoch bereits, dass sie sich auch im materiefreien Raum ausbreiten.

Aus der 3. Maxwellschen Gleichung im Vakuum folgt, dass Licht eine transversale Welle sein muss. Das heißt, dass die Elektrische Feldstärke E und die magnetische Feldstärke B , senkrecht zur Ausbreitungsrichtung schwingen. Dies wurde ebenfalls experimentell durch Polarisationserscheinungen bestätigt.

Aus all diesen experimentell bestätigten Vorhersagen der Maxwellschen Theorie schlossen Hertz und Maxwell, welche mechanistischen Eigenschaften das Trägermedium für Lichtwellen besitzen sollte, welches sie „Äther“ nannten:

- Da Licht Transversalwellen sind, sollte das Medium die Übertragung von Scherkräften erlauben
- Da c sehr groß ist, sollte das Medium sehr robust sein

- Da elektromagnetische Wellen im gesamten Universum vorkommen (Sternenlicht), darf das Medium den Planetenbewegungen keinen Widerstand entgensetzen
- Da Licht sich auch in Materie ausbreitet, z.B. Wasser, musste der Äther auch alle materiellen Bereich durchsetzen.

Dies war die sogenannte „Ätherhypothese“.

Die Frage, die natürlich neben der Suche nach dem Ausbreitungsmedium für Licht beantwortet werden musste, war, ob für die Ausbreitung der elektromagnetischen Felder auch die Galilei-Transformation gilt. Ein Problem bezüglich der Galilei-Transformation hatte sich bereits mathematisch manifestiert: Die Wellengleichung, wie sie auch beim Schall auftritt, ist nicht form-invariant unter einer Galilei-Transformation. Wendet man die Galilei-Transformation an, erhält man Vorhersagen, die nicht mit dem Relativitätsprinzip vereinbar sind. Im Fall von Schallwellen, ist dies jedoch dadurch korrigierbar, dass zu derjenige, vom Medium festgelegten Ausbreitungsgeschwindigkeit (z.B. (1.31)), stets eine Relativgeschwindigkeit addiert werden kann, sodass das Relativitätsprinzip gewahrt bleibt.

Wir zeigen nun kurz, dass die Wellengleichung nicht invariant unter einer Galilei-Transformation ist.

Dieser Abschnitt ist von intensiverer mathematischer Abstraktion. Da er nicht essentiell für das Verständnis der folgenden Kapitel ist, kann der Leser ihn ohne Bedenken überspringen.

Die Wellengleichung für das elektrische Feld, z.B. (1.41) kann auch als Differentialoperator-Gleichung geschrieben werden, indem man die Differentialoperationen ausklammert

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = 0 \tag{1.43}$$

Darauf wollen wir nun die Galilei-Transformation anwenden. Wie man in der Wellengleichung (1.43) sieht, benötigen wir dafür die 2. partiellen Ableitungen der Koordinatenzusammenhänge und damit der Galilei-Transformationsgleichungen. Allgemein gilt für Transformationsgleichungen mit zwei Koordinaten (z.B. $x'(x,t)=ax+bt$), wenn man die Kettenregel der Differentiation berücksichtigt und nachdifferenziert:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'}$$

Wenden wir dies auf die einfache Galilei-Transformation, mit $x'=x-vt$ und $t'=t$, an dann folgt

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \quad (1.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + 1 \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial(x-vt)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + 1 \frac{\partial}{\partial t'} = -v \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'}$$

Für die Transformation von (1.43) werden jedoch die 2. partiellen Ableitungen gebraucht

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \quad (1.46)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(-v \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \right)^2 = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2v \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

Diese 2. partiellen Ableitungen setzten wir jetzt in (1.43) ein

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \left(v^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2v \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) \right) \vec{E} = 0 \quad (1.47)$$

Man erkennt eindeutig, dass die Wellengleichung also nicht forminvariant unter der Galilei-Transformation ist. Für die Physiker Ende des 19. Jahrhunderts war es nun auch deshalb äußerst wichtig, das Medium, in dem sich Licht (und damit elektromagnetische Wellen) ausbreitet, zu finden.

Im Fall der Ausbreitung des Schalles wissen wir, wenn sich das Medium Luft mit Geschwindigkeit v_{gas} in Richtung der Schallwelle bewegt, dann wird der Schall sozusagen schneller, sodass sich der Schall dann mit $c=c_{\text{gas}} + v_{\text{gas}}$ bewegt (1.36).

Im Experiment aus Abbildung 1.15 wird klar dass man hier von einer „vollständigen Mitführung“ des Mediums Luft im gleichförmig bewegten Zug spricht.

Da sich Licht auch in bewegter Materie ausbreitet (z.B. Wasser), gingen die Physiker davon aus, man könnte die Lichtgeschwindigkeit in Abhängigkeit von einer „Bewegung des Äthers“, analog der Ausbreitung des Schalles (Formeln (1.36) – (1.38)) und damit unter dem Einfluss der Galileitransformationen berechnen, sodass das Newtonsche Relativitätsprinzip gewahrt bliebe. Fände man keinen Äther so stünden die Gleichungen der gesamten Newtonschen Mechanik vor dem Abgrund. Da sich Licht im gesamten Universum ausbreitet, erwarteten die Physiker also auch, dass der „Äther“ als Trägermedium des Lichtes, alle materiellen Bereiche des Weltalls durchsetzt. Ein so universeller Träger des elektromagnetischen Feldes, sollte dann als ausgezeichnetes Koordinatensystem der Elektrodynamik anzusehen sein.

1.8 Die Ausbreitung von Licht in bewegter Materie

Wird Licht durch ruhende Materie geleitet, dann benötigt es eine längere Zeit, als wenn es die gleiche Strecke durch ein Raumgebiet ohne Materie zurücklegt. Die Geschwindigkeit ist abhängig vom Brechungsindex der Materie. Dies war den Physikern vor Einstein bereits lange bekannt:

$$c_{mat} = \frac{c}{n} \quad (1.48)$$

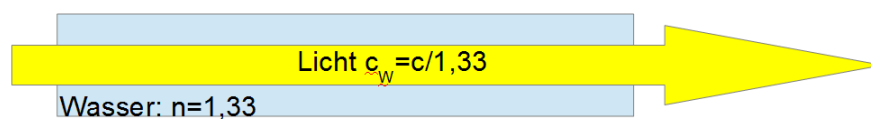


Abbildung 1.16: Lichtausbreitung in ruhendem Wasser

Von großer Wichtigkeit bei der Aufdeckung der Eigenschaften des hypothetischen Trägermediums „Äther“ des Lichtes, war es nun um ca. 1850 zu klären, inwiefern der Äther im Inneren **bewegter** Materie mitgeführt wird.

Der französische Physiker Armand Fizeau war 1851, der erste, der experimentell feststellen konnte wie schnell sich das Licht in Wasser ausbreitet, wenn sich das Wasser selbst mit Geschwindigkeit v_w bewegt (Abbildung 1.17).

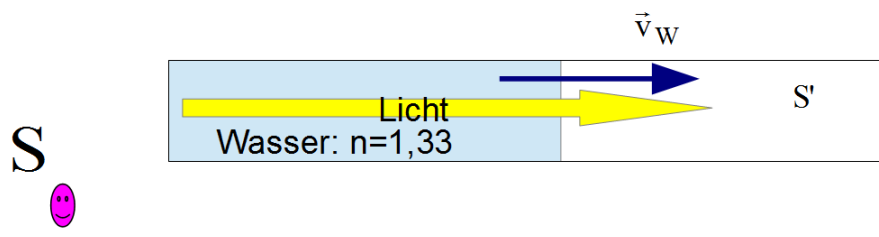


Abbildung 1.17: Schematische Darstellung zur Lichtausbreitung in bewegtem Wasser

Würde der „Äther“ (hypothetisches Trägermedium für die Lichtausbreitung) vollständig mitgeführt, dann müsste sich die Geschwindigkeit des Wassers - analog zum

Falle der Schallwellen im Wind - zur Geschwindigkeit des Lichtes c addieren, also $c_{mit}=c/n + v_w$. Es konnte jedoch auch möglich sein, dass der Äther nur teilweise mitgeführt würde und so hätte sich nach damaligen Vorstellungen ergeben sollen

$$c_{mit} = \frac{c}{n} + F \cdot v_w \quad (1.49)$$

wobei F als Fresnelscher Mitführungskoeffizient bezeichnet wird. Bei vollständiger Mitführung wäre $F=1$. Der Fall $F=0$, würde dann bedeuten, dass der „Äther“ ruht und die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes in Materie $c_{mat}=c/n$, unabhängig von der Bewegung der Materie, konstant wäre. Aus dem ersten Versuch dieser Art ergab sich ein Wert von $F=0,48$, für die Mitführung in Wasser. Der Nachteil dieses Versuches war, dass die Geschwindigkeit des Wassers gegenüber c sehr klein war, so dass sich leicht Messfehler einschleichen konnten. Bei einem verfeinerten Versuch durch Hoek wurde das Ergebnis jedoch ebenso bestätigt. Aus all diesen Experimenten erhält man für F folgenden Zusammenhang mit dem Brechungsindex der Materie (wenn Ausdrücke mit dem Faktor v_w^2/c^2 vernachlässigt werden):

$$F = 1 - \frac{1}{n^2} \quad (1.50)$$

Mit den damaligen Vorstellungen wurde dieses Ergebnis als „partielle Mitführung des Äthers“ in Materie interpretiert. Speziell folgt aus Gleichung (1.50), dass im Vakuum ($n=1$) oder in Luft (n etwa 1) wegen $F=0$ keine Mitführung auftreten darf. Nach (1.49) wäre $c_{mit}=c$ und damit unabhängig von jeglicher Bewegung im Vakuum stets gleich hoch (1.42).

Diese „starke“ Behauptung musste man natürlich unbedingt testen. Die Physiker entwickelten aus diesem Grund verschiedene Experimente. Das bekannteste von Ihnen trägt den Namen des amerikanischen Physikers Albert A. Michelson und des amerikanischen Chemikers Edward W. Morley, und es heißt deshalb Michelson-Morley Experiment. Es wurde 1881 durchgeführt.

1.9 Das Michelson-Morley Experiment (1881)

Mit diesem Experiment wollte man nun herausfinden ob es tatsächlich so ist, dass die Lichtgeschwindigkeit unabhängig von einer Bewegung durch die Leere des Weltalles stets gleich groß ist. Man bezog dazu die Bewegung der Erde um die Sonne durch das Weltall in den Versuchsaufbau mit ein. Ziel des Versuches war es nun zu untersuchen, ob die Vorhersagekraft der Galilei-Transformation zusammen mit der klassischen Addition von Geschwindigkeiten ausreicht um die Ergebnisse des Michelson-Morley Experimentes richtig vorherzusagen.

Gemäß der theoretischen Vorstellung, sollte die Bewegung der Erde durch das Weltall mit Geschwindigkeit v , eine Art „Gegenwind“ des „Äthers“ erzeugen. Dieser „Gegenwind“ müsste dann einen Lichtstrahl, der in Bewegungsrichtung der Erde geschickt wird, auf $c-v$ abbremsten. Das Experiment wurde mit einem Interferometer durchgeführt. Ein Lichtstrahl wurde auf einen halbdurchlässigen Spiegel B geschickt, der einen Teil des Lichtes in gerader Richtung (nach E) hindurchlässt und den restlichen Anteil 90° dazu ablenkt. Die Länge der beiden Interferometerarme ist L .

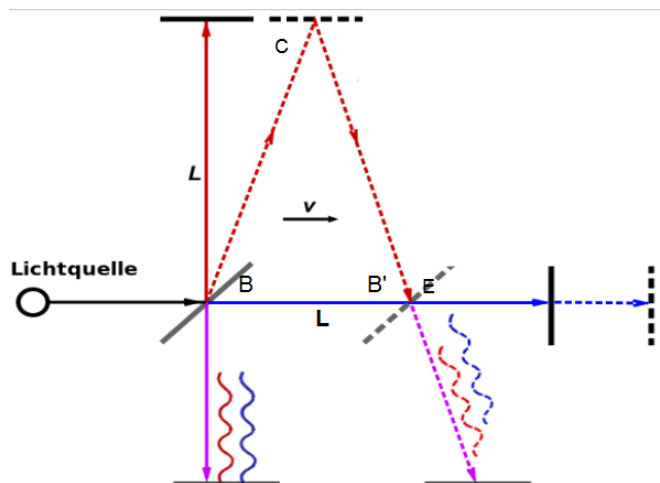


Abbildung 1.18: Schematische Darstellung des Michelson-Morley Experimentes

Wir berechnen nun mittels klassischer Geschwindigkeitsaddition – welche den Satz des Pythagoras inhäriert - das erwartete Ergebnis.

Lichtlaufzeit im senkrechten Interferometer-Arm (Strecke BC)

Für die Strecke von B nach C erhalten wir

$$c^2 t_{\perp}^2 = L^2 + v^2 t_{\perp}^2 \quad \Rightarrow \quad t_{\perp} = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} \quad (1.51)$$

Für den Rückweg von C nach B' ergibt sich die gleiche Zeit, sodass die Lichtlaufzeit im gesamten senkrechten Interferometerarm, also Hin- und Rückweg

$$T_{\perp} = 2 \cdot t_{\perp} = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.52)$$

ist.

Lichtlaufzeit im horizontalen Interferometer-Arm (Strecke BE)

Für die Strecke des Hinweges benutzen wir die lineare Superposition der Geschwindigkeiten. Das Licht muss aufgrund der Bewegung der Erde mit v einen größeren Weg als L zurücklegen.:

$$ct_{//hin} = L + v \cdot t_{//hin} \quad \Rightarrow \quad t_{//hin} = \frac{L}{c - v}$$

Nach der Reflexion legt das Licht einen kürzeren Weg zurück:

$$t_{//r} = \frac{L}{c + v}$$

Für den gesamten Hin- und Rückweg im horizontalen Arm gilt also

$$T_{//} = t_{//hin} + t_{//r} = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} = \frac{2L}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1.53)$$

Mit diesen theoretischen Vorhersagen (1.52) und (1.53) erwartete man also Laufzeitunterschiede, da in jedem Fall

$$T_{\perp} < T_{//}$$

sein musste, wenn die Vorstellung richtig wäre, nämlich dass die Bewegung des Lichtstrahles, relativ zum postulierten „Äther“ als Trägermedium des Lichtes, mit der klassischen Geschwindigkeitsaddition berechnet werden kann.

Das Ergebnis des Michelson-Morley Experiment zeigt jedoch, dass es überhaupt keinen messbaren Effekt auf die Laufzeit des Lichtes gab, egal wie die Messapparatur ausgerichtet wurde. Man stellte experimentell also fest:

$$T_{\perp} = T_{\parallel}$$

Das Michelson-Morley Experiment bestätigte damit die Ergebnisse aus dem vorhergehenden Kapitel 1.8. Das heißt, dass im Vakuum (näherungsweise in Luft) keine partielle Mitführung auftritt. Aber dies bedeutete auch, dass die hier zur Interpretation des Michelson-Morley Experimentes angewendeten **Berechnungsformeln**, die auf der Galileitransformation und der klassischen vektoriellen Geschwindigkeitsaddition beruhen, für die Lichtausbreitung falsch sein mussten. **Die klassische theoretische Physik auf den Säulen von Galilei und Newton, versagt in diesem Fall also vollständig.**

In den ersten Erklärungsversuchen ging der Physiker Lorentz noch davon aus, dass der Äther den Spiegelarm in horizontaler Lage, der entlang der Bewegungsrichtung der Erde lag, komprimieren würde, damit sich die Laufzeiten angleichen konnten (Lorentzsche Kontraktionshypothese).

Für den mit v bewegten horizontalen Spiegelarm L_{\parallel} sollte gelten:

$$L_{\parallel} = L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Die Lorentzsche Kontraktionshypothese könnte den negativen Ausgang des Michelson-Morley Experimentes zwar erklären, es ergeben sich jedoch Schwierigkeiten. Sie widerspricht fundamental dem experimentell bestätigten Newtonschen Relativitätsprinzip. Experimentelle Ergebnisse stimmen in Inertialsystemen überein. Ein Inertialbeobachter (Beobachter in einem Inertialsystem) kann mit einem Experiment nicht unterscheiden, ob er sich gleichförmig bewegt oder ruht. Eine Kompression des Spie-

gelarmes würde per definition jedoch Kräfte erfordern, die im Widerspruch zum Inertialsystem stehen.

Die Ergebnisse weiterer Experimente forderten, dass auch die Zeit einer ähnlichen Modifikation mit dem Faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ bedurfte. Der Kehrwert dieses Faktors wird zu Ehren Hendrik Anton Lorentz als Lorentz-Faktor bezeichnet. Er spielt eine herausragende Rolle in der Relativitätstheorie.

Unterstützt durch den französischen Mathematiker Poincarè fand Lorentz, unter Voraussetzung der Existenz des „Äthers“ Transformationsgesetze, die diesen Faktor enthalten und für den Wechsel von unterschiedlichen Inertialsystemen, für Maxwells Gleichungen zu keinen Widersprüchen mit den experimentellen Erscheinungen in unterschiedlichen Inertialsystem führten.

Weitere Versuche zeigten jedoch ebenso, dass es nicht möglich war, die Existenz des Äthers und einer absoluten Geschwindigkeit bezüglich des Äthers zu messen.

Beim Übergang zum 20. Jahrhundert herrschte also ein ziemlich großes Chaos zwischen der theoretischen Beschreibung physikalischer Vorgänge und den experimentellen Ergebnissen. Keine damalige Theorie konnte jede Erscheinung zufriedenstellend erklären.

Erst als der damals völlig unbekannt Patentangestellte 3. Klasse am Berner Patentamt, mit Namen Albert Einstein, sich der Thematik annahm konnte ein Durchbruch erreicht werden. Im Jahre 1905 veröffentlichte er mit seinem epochalen Werk „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“ [4] in den Annalen der Physik, bahnbrechende Erkenntnisse für die gesamte Physik.

1.10 Die Axiome der Speziellen Relativitätstheorie

Albert Einstein legte 1905 mit seiner Arbeit „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“ [4] den Grundstein für die gesamte Relativitätstheorie. Mit diesem Werk kündigte sich eine Revolution der gesamten physikalischen Beschreibung mechanischer und elektrodynamischer (einschließlich optischer) Vorgänge an. Die Spezielle Relativitätstheorie (Abkürzung: SRT) fußt auf 2 experimentell gesicherten Axiomen, in denen er zum einen das Newtonsche Relativitätsprinzip erweitert und zweitens die Lichtgeschwindigkeit zu einer Konstanten erhebt, die unabhängig vom Bezugssystem ist.

1) Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Licht breitet sich im Vakuum aus. Seine Geschwindigkeit beträgt c und ist in allen Inertialsystemen stets gleich groß. Sie ist unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle und des Beobachters.

2) Relativitätsprinzip der Speziellen Relativitätstheorie (SRT)

In allen Inertialsystemen laufen die physikalischen Vorgänge gleich ab. Physikalische Gesetze und Koordinatentransformationen sind so zu gestalten, dass die Rechenergebnisse den experimentellen Ergebnissen in Inertialsystemen entsprechen und zwar unter Berücksichtigung von 1). Die richtigen Koordinatentransformationen enthalten den Lorentz-Faktor. Mit ihnen ist es möglich die physikalischen Größen zwischen relativ zueinander bewegten Inertialsystemen ineinander umzurechnen.

Das erste Postulat von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, scheint dem gesunden Menschenverstand völlig zu widersprechen. Es bedeutet, dass die bis dahin gültigen Galilei Transformationen zwischen Inertialsystemen nicht mehr gültig sein konnten, denn mit Ihnen würden sich für die Geschwindigkeit von Licht in einem relativ zu einem anderen Bezugssystem $c+v$ oder $c-v$ ergeben, was gemäß diesem Pos-

tulat nicht mehr möglich sein sollte. Anders ausgedrückt, sollte jeder Beobachter unabhängig davon in welcher Richtung und mit welcher Geschwindigkeit er sich bewegt, für einen vorbeilaufenden Lichtblitz immer die Geschwindigkeit c messen.

Einsteins Postulat war jedoch völlig in Übereinstimmung mit dem Michelson-Morley Experiment, sowie allen ähnlichen Experimenten die es davor und danach jemals gegeben hat. Es bedeutete auch das Aus für den Äther, der als Trägermedium der Lichtausbreitung postuliert wurde, dessen Existenz jedoch durch keinen Versuch nachgewiesen werden konnte.

Das zweite Postulat löste zunächst große Abneigung aus, da man nicht glauben konnte, dass die Galileitransformation falsch sein konnte. Immer noch vertraute man dem Newtonschen Glauben und wollte nicht einsehen, dass es einer Überarbeitung bedurfte, damit die physikalische Beschreibung der Vorgänge mit den Versuchsergebnissen in Einklang gebracht werden konnten.

Einsteins Idee war es nicht, Newtons Beschreibung der Mechanik komplett zu verwerfen. Denn ihre Gültigkeit war unmittelbar bei der Auswertung von Planetenbewegungen mit großer Genauigkeit seit Jahrhunderten bewiesen. Er wollte vielmehr ihre Gültigkeit auch auf Vorgänge mit großer Geschwindigkeit, wenn diese aus unterschiedlichen Inertialsystem beschrieben werden, erweitern.

Einsteins Ideen führten ihn zunächst zu gleichen Ergebnissen, die Lorentz und Poincarè, für die Erklärung der Ergebnisse des Michelson-Morley Experimentes, anhand einer Kontraktionshypothese erhalten haben. Seine Theorie konnte jedoch darüber hinaus weit aus mehr leisten, ohne die nicht haltbare Vorstellung der Existenz eines Äthers aufrecht erhalten zu müssen.

Beide Postulate führen direkt zu einigen überraschenden Konsequenzen, die wir in den nächsten Abschnitten anhand zahlreicher Gedankenexperimente plausibilisieren wollen:

- Die Vorstellung eines „Äthers“ als Trägermedium des Lichtes muss verworfen werden
- Die Galilei-Transformation und die klassische Geschwindigkeitsaddition kann für Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit nicht richtig sein

- Die Feststellung der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse ist abhängig von welchem Inertialsystem aus die Ereignisse festgestellt werden.
- Verschiedene Inertialbeobachter (Beobachter in verschiedenen Inertialsystemen) stimmen in ihren Zeitmessergebnissen für die Dauer von Vorgängen nicht miteinander überein: $t \neq t'$

1.11 Gedankenexperimente zur Plausibilisierung der Konsequenzen der SRT

Relativität der Gleichzeitigkeit

Uhren an Bug und Heck (an den Punkten D, E, F, G) zweier aneinander vorbeifliegender Raketen (mit Relativgeschwindigkeit v , Abbildung 1.19) werden von einer Blitzlampe in deren Mitte synchronisiert, sobald sich die Raketen genau gegenüber sind. Das Bild zeigt eine Momentaufnahme, wenn die Raketen genau gegenüber stehen. Die Lichtgeschwindigkeit ist aus Sicht der oberen und unteren Rakete immer gleich c .

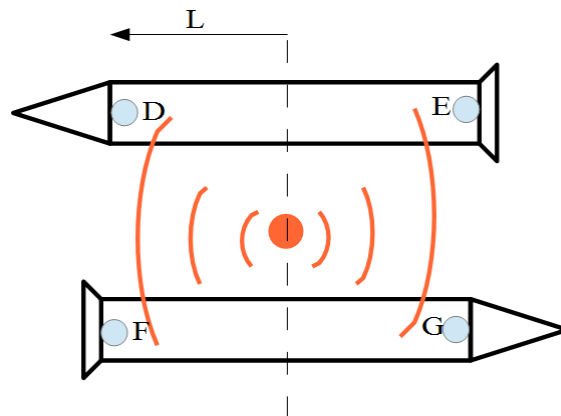


Abbildung 1.19: Relativität der Gleichzeitigkeit

Der Vorgang kann nun aus Sicht der oberen oder der unteren Rakete völlig gleichwertig beschrieben werden, da keines der Inertialsysteme bevorzugt ist.

Aus der Sicht eines Beobachters in der unteren Rakete (willkürlich Inertialsystem S genannt) stellt sich der Vorgang wie in Abbildung 1.20 dar

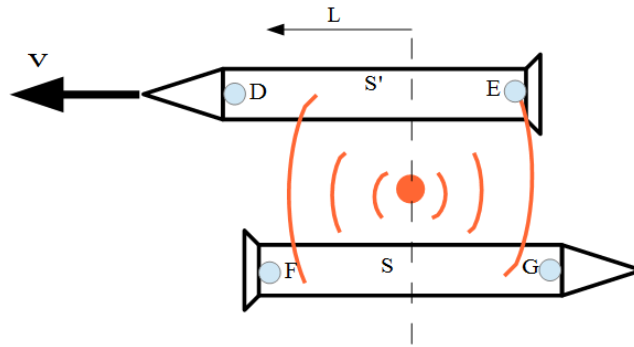


Abbildung 1.20: Relativität der Gleichzeitigkeit 2

Aus Sicht der unteren Rakete werden seine beiden Uhren bei F und G gleichzeitig gestartet. Die Laufzeit des Lichtes ist für ihn somit vom Mittelpunkt M aus

$$T_{MF} = T_{MG} = \frac{L}{c}$$

Die Uhren bei D und E in der oberen Rakete würden jedoch für S nicht gleichzeitig gestartet. Aus Sicht der unteren Rakete legt das Licht vom Mittelpunkt bis zum Punkt D eine Strecke zurück, die um $T_{MD} \cdot v$ größer ist als L.

$$L = T_{MD}c - T_{MD}v$$

$$T_{MD} = \frac{L}{c - v} > T_{ME} = \frac{L}{c + v}$$

Würde man den Vorgang aus Sicht der oberen Rakete (S') beschreiben, so ergäbe sich, dass dieser seine Uhren gleichzeitig startend wahrnimmt, während er feststellen würde, dass die Uhren der unteren Rakete nicht gleichzeitig gestartet werden würden. Da jedoch beide Inertialsysteme gleichberechtigt sind, hat jeder Recht. Dies führt dazu dass die Vorstellung einer absoluten Zeit aufgegeben werden muss.

Relativität des Zeitverlaufes

Wir erinnern uns an das „Bahnsteig-Zug Experiment“ in Abbildung 1.8, mit dem wir die klassische Geschwindigkeitsaddition veranschaulicht haben. Anstelle des Spielzeugautos besitze Bob eine Taschenlampe, mit dem er das Ende des Zuges anvisiert. Dort befindet sich ein Spiegel (Abbildung 1.21)

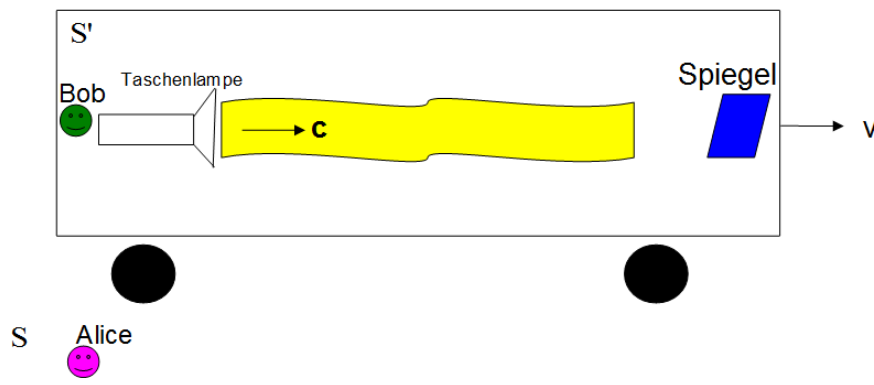


Abbildung 1.21: Relativität der Zeit

Bob kann die Geschwindigkeit des Lichtes messen, indem er den Weg den das Licht bis zum Spiegel und wieder zurück verfolgt, durch die Zeit teilt, die dieser Vorgang dauert. Das bedeutet jedoch, dass für Bob (S') zu jedem Zeitpunkt und Ort

$$c = \frac{x'}{t'} \quad (1.54)$$

für die Geschwindigkeit des Lichtstrahles gelten muss.

Für Alice hat das Licht nach allen experimentellen Ergebnissen, ebenfalls die Geschwindigkeit c , also $c'=c$, deshalb bedeutet das für ihre Rechnung

$$c = \frac{x}{t} \quad (1.55)$$

Zum Start-Zeitpunkt $t=t'=0$ liegen beide Inertialsysteme bei $x=x'=0$. Nachdem sich der Zug mit Bob in Bewegung setzt, wissen wir jedoch, dass $x \neq x'$ sein muss, da sich ja die Bewegung des Zuges mit Geschwindigkeit v mit der Bewegung des Lichtstrahles überlagern muss.

Wenn wir testweise die Gültigkeit der Galilei-Transformation voraussetzen (obwohl sie nicht vollständig richtig ist), dann könnte zum Beispiel Bob die x -Koordinate (von Alice) folgendermaßen (1.1) berechnen: $x = x' + vt$.

Wendet man dies auf (1.55) an, dann folgt daraus $c = x'/t + v$.

Damit wäre c jedoch nicht konstant, sondern abhängig von t und v .

Die Zeit t muss sich daher aber für Alice in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit des Zuges v genau so ändern, dass sich für $x'/t + v$ immer der Wert von c ergibt. Das bedeutet also $t \neq t'$ und $t = f(v)$. Die Zeit t ist eine Funktion der Relativgeschwindigkeit v . Da aber beide Inertialbeobachter (Bob und Alice) gleichberechtigt sind, muss zusätzlich $t' = f(v)$ mit dem gleichen funktionellen Zusammenhang gelten. Hieraus kann gefolgert werden, dass es sogar zwischen t und t' einen funktionellen Zusammenhang in Form einer Transformation (Umrechnung) geben kann.

Beide Gedankenexperimente zeigen, dass die Postulate der SRT zu einer neuen Bedeutung von Raum und Zeit führen werden.

Da sich Beobachter in verschiedenen Inertialsystemen nicht mehr einig über die Zeit t sind und sogar ein funktioneller Zusammenhang zwischen der Zeit t und t' bestehen kann, wollen wir die Zeit t wie eine Koordinate behandeln.

Ereignisse in Raum und Zeit

Wir führen deshalb eine Konvention ein, die sehr nützlich ist, physikalische Vorgänge in Raum- und Zeit zu beschreiben, wenn die Geschwindigkeit der zu beschreibenden physikalischen Vorgänge in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit liegen:

Ein Ereignis E wird in einem Inertialsystem S mit den 4 Koordinaten $E(t_E, x_E, y_E, z_E)$ beschrieben. Das gleiche Ereignis E wird in S' mit den Koordinaten $E(t'_E, x'_E, y'_E, z'_E)$ beschrieben.

1.12 Die Zeitdilatation

Die vorhergehenden Gedankenexperimente dienen der Plausibilisierung der offensichtlichsten Konsequenzen der Postulate Einsteins SRT, ohne jedoch quantitative Aussagen zu treffen.

Wir werden uns nun quantitativ mit den beiden wichtigsten kinematischen Effekten der SRT beschäftigen, der Zeitdilatation und der Längenkontraktion, welche mit höchster Präzision in zahlreichen Experimenten bestätigt worden sind. Wir beginnen mit der Zeitdilatation und betrachten dazu Abbildung 1.22.

Wir stellen uns eine „Lichtuhr“ vor, deren Funktion darauf beruht, dass ihr Takt durch die Reflexion eines Lichtstrahles zwischen zwei Spiegeln im Abstand d , gegeben ist. Unsere Protagonisten sind hier wieder Alice (S) und Bob (S'), die für uns das Experiment durchführen. In Abbildung 1.22 ist der Verlauf des Lichtstrahles für Bob dargestellt. Für ihn ruht die Lichtuhr zu allen Zeiten t' .



Abbildung 1.22: Schematische Darstellung des „Lichtuhr“-Experimentes aus der Sicht von Bob (S')

In Abbildung 1.23 hingegen ist der Verlauf des Lichtstrahles für Alice dargestellt. Aus Ihrer Sicht ruht die Lichtuhr nicht.

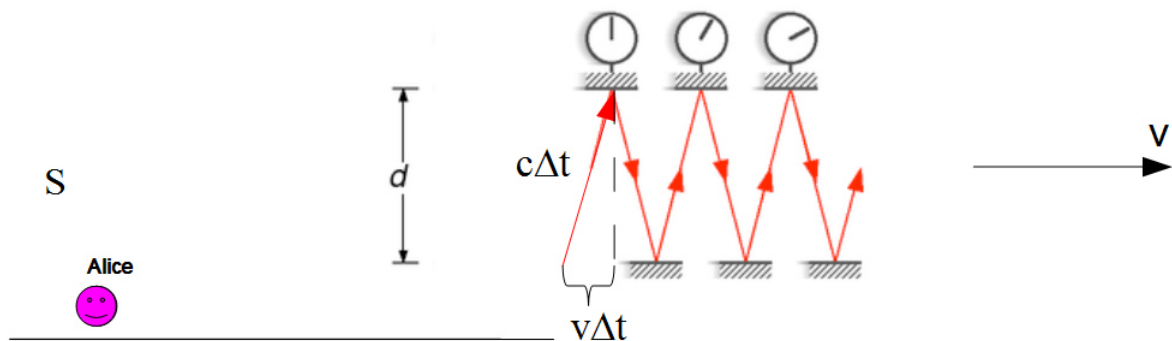


Abbildung 1.23: Schematische Darstellung des „Lichtuhr“-Experimentes aus der Sicht von Alice (S)

Wir wollen uns nun die beiden entscheidenden Ereignisse A und B aus der Sicht von S und aus der Sicht von S' genauer analysieren und die unbekannt Koordinaten und Zeiten dieser Ereignisse im Anschluss berechnen.

Ereignis A: „Absenden des Lichtsignals vom unteren Spiegel und Start der Lichtuhr-Bewegung mit Geschwindigkeit v in x -Richtung“

$$\text{In S: } A(t_A, x_A) = A(0, 0)$$

$$\text{in S': } A(t'_A, x'_A) = A(0, 0)$$

Ereignis B: „Empfangen des Lichtsignals am unteren Spiegel, nach Reflexion oben“

$$\text{In S: } B(t_B, x_B)$$

$$\text{In S': } B(t'_B, x'_B) = B(t'_B, 0)$$

Wir berechnen zunächst die Zeitdifferenz der Ereignisse A und B für Bob in S'. Für ihn ruht die Lichtuhr und die Ereignisse finden also am gleichen Ort statt $\Delta x'_{AB} = 0$

$$\Delta t'_{AB} = t'_B - t'_A = \frac{2d}{c} = \Delta \tau_{AB} \quad (1.56)$$

Aus der Sicht von S geschieht das Experiment jedoch gemäß Abb. 1.23. Die Lichtuhr ruht für Alice nicht und das Licht legt einen größeren Weg zwischen den Ereignissen A und B zurück. Die gleichen Ereignisse A und B finden für S nicht am selben Ort

statt $\Delta x_{AB} \neq 0$. Und deshalb ist $\Delta t_{AB} = t_B - t_A > \frac{2d}{c}$

Gemäß allen experimentellen Befunden muss die Lichtgeschwindigkeit c jedoch in die resultierende Richtung auch für S gleich c sein. Für die Laufzeit von unten nach oben gilt deshalb mit dem Satz des Pythagoras:

$$c^2 \Delta t^2 = d^2 + v^2 \Delta t^2$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{d}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{mit} \quad \Delta t = \frac{1}{2} \Delta t_{AB} \quad (1.57)$$

Und deshalb für die Zeitdifferenz zwischen A und B für Alice (S) die gegenüber der Lichtuhr bewegt ist (und umgekehrt):

$$\Delta t_{AB} = \frac{2d}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.58)$$

Wie bereits anhand des Gedankenexperimentes in Abbildung 1.21 dargestellt, erhalten wir einen funktionellen Zusammenhang der Zeit mit der Relativgeschwindigkeit v . Der Faktor der dies übernimmt ist der Lorentz-Faktor.

In S' , in dem A und B am gleichen Ort stattfanden und die Lichtuhr ruht, ergibt sich also:

$$\Delta t'_{AB} = \Delta \tau_{AB} = \frac{2d}{c}$$

In S , in dem A und B nicht am gleichen Ort stattfanden und die Lichtuhr also bewegt ist, ergibt sich:

$$\Delta t_{AB} = \frac{2d}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \Delta \tau_{AB} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.59)$$

Der Ausdruck $\Delta\tau_{AB}$ wird auch als Eigenzeitintervall zwischen den Ereignissen A und B bezeichnet. Dieses Zeitintervall stellt offensichtlich das kürzest mögliche Zeitintervall für 2 Ereignisse A und B dar.

Eine Zeitdifferenz zwischen 2 Ereignissen A und B, die innerhalb eines Inertialsystems an einem Ort stattfinden, kann mit einer einzigen Uhr an diesem Ort gemessen werden. Die Zeitdifferenz zwischen A und B in diesem Inertialsystem heißt Eigenzeitintervall zwischen Ereignis A und B.

In allen anderen Inertialsystemen misst man für die Zeitdifferenz zwischen A und B ein größeres Zeitintervall. **Das Eigenzeitintervall ist das kürzeste Zeitintervall zwischen 2 Ereignissen.** Wenn $v=c$ ist, dann bedeutet dies jedoch, dass die Zeit des bewegten Systems S' vom anderen System S aus betrachtet, still zu stehen scheint.

Für die anwendungsorientierte Berechnung der Zeitdilatation kann man daraus hilfreiche Handlungsanweisungen ableiten, wie z.B. :

Um das Eigenzeitintervall $\Delta\tau_{AB}$ zwischen zwei physikalischen Ereignissen A und B, für ein relativ zu mir bewegtes Inertialsystem zu bestimmen, muss ich meine gemessene Zeitdifferenz Δt_{AB} , welche ich für die gleichen physikalischen Ereignisse A und B in meinem Inertialsystem gemessen habe, mit dem Faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ multiplizieren.

3 Wichtige Anmerkungen zu Implikationen der Zeitdilatation:

1. Aufgrund des experimentell bestätigten Relativitätsprinzips, wonach man experimentell nicht unterscheiden kann ob man sich gleichförmig bewegt oder ruht, muss dieser Effekt der Zeitdilatation wechselseitig symmetrisch sein: Jedes der Inertialsysteme kann sich in Ruhe ansehen. Es geht stets die Uhr des anderen Inertialsystems nach! Tatsächlich gehen jedoch identische Uhren in Inertialsystemen gleich, so wie es zu Beginn festgestellt werden kann. Dies gilt, sofern sich die beiden Inertialsysteme immer gleichförmig bewegen. Sobald sich ein Inertialsystem von der gleichförmigen Bewegung löst und z.B. umkehrt oder abbremst, ist die Zeitdilatation irreversibel.

2. Die gleichförmige Bewegung der Lichtuhr kann niemals zur Folge haben, dass sich der Abstand der Spiegel senkrecht zur Bewegungsrichtung ändert. Eine Uhr die auf

Gleisen montiert wäre würde dann aus den Gleisen springen. Dies würde jedoch das Auftreten von Kräften benötigen. Dies ist nicht beobachtbar und auch nicht mit dem Relativitätsprinzip vereinbar.

3. Die Zeitdilatation beschränkt sich nicht auf Zeitmessungen für die Bewegung des Lichtes, sondern gilt für den Zeitverlauf aller physikalischer Vorgänge.

Wir können die letzte Behauptung mit Abbildung 1.24 veranschaulichen. Wir betrachten dazu nochmal die Geschwindigkeitsverhältnisse in der Lichtuhr von S aus gesehen. Da die Gesamtgeschwindigkeit des Lichtes immer c ist, ergibt sich für die Bewegung des Lichtes von S aus betrachtet, ein rechtwinkliges Dreieck der Geschwindigkeiten. Für den Beobachter im Inertialsystem S , welches als bewegt gegenüber der Uhr angenommen ist also

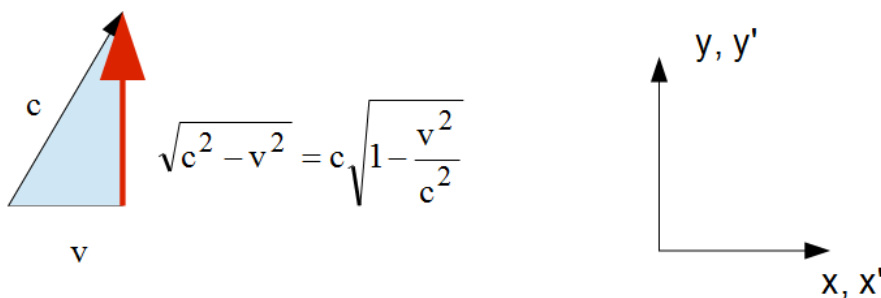


Abbildung 1.24: Schematische Darstellung des „Lichtuhr“-Experimentes aus der Sicht von Alice (S)

Wäre die Uhr mechanisch und würde man z.B. einen Ball mit Geschwindigkeit u' (von S' aus) hoch und runter springen lassen und die Zeiteinheit danach festlegen, dann gilt in S' , wobei u' ein Bruchteil n von c sein muss

$$u'_y = \frac{c}{n} \tag{1.60}$$

Der Beobachter in S erhält jedoch für die senkrechte Komponente der Geschwindigkeit dann mit obigem Ergebnis aus dem Geschwindigkeitsdreieck, indem man c durch c/n ersetzt:

$$u_y = \left(\frac{c}{n}\right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1.61)$$

Auch aus diesen Erkenntnissen lassen sich hilfreiche Handlungsanweisungen für die Berechnung physikalischer Vorgänge ableiten:

Wenn man im System S für die Geschwindigkeit eines senkrecht zu Bewegungsrichtung stattfindenden Prozesses den Wert u_y misst, dann muss man diesen Wert mit dem Lorentz-Faktor multiplizieren um zu wissen wie schnell der Prozess in S' vor sich geht.

Bezüglich der Zeitdilatation fordert das Relativitätsprinzip, dass jeder Vorgang, der eine gewisse Zeit benötigt, einem stillstehenden Beobachter langsamer erscheint, als dem mitbewegten Beobachter. Gäbe es ein bestimmtes Phänomen, bei dem dies nicht der Fall ist, dann könnte der gleichförmig mitbewegte Beobachter genau dieses Phänomen als Experiment heranziehen und feststellen dass er sich gleichförmig bewegt oder ruht.

Alle Phänomene, der Pulsschlag von Bob im Zug, seine Gedanken, die Zeit die es dauert, bis er sich eine Zigarette anzuzündet, die Zeit die es braucht dass seine Haare wachsen – all dies muss genauso verlangsamt erscheinen, ansonsten könnte er experimentell feststellen, dass er sich gleichförmig bewegt.

Man kann sich dies auch mathematisch dadurch erklären, weil jeder Vorgang mit einer Geschwindigkeit abläuft, der ein gewisser Bruchteil der Lichtgeschwindigkeit ist. Da aber die Lichtgeschwindigkeit immer konstant ist, sind es auch die Bruchteile für einen bestimmten Vorgang. Da es sich aber so verhält, bedeutet es, dass die Feststellung der Zeit eines anderen Inertialsystem genau auf oben beschriebene Formeln hinausläuft.

Einstein hat die Konsequenzen der Zeitdilatation in einem auf den ersten Blick unglaublichen Beispiel veranschaulicht. Er schreibt sinngemäß in [4]:

„Sind in den Punkten A und B von S ruhende, im ruhenden System betrachtet, synchron gehende Uhren vorhanden, und bewegt man die Uhr in A mit der Geschwindigkeit v nach B, so gehen nach Ankunft dieser Uhr in B, die beiden Uhren nicht mehr synchron, sondern die von A nach B bewegte Uhr geht pro Sekunde um $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ Sekunden nach“.

Die von der speziellen Relativitätstheorie vorhergesagten Effekte der Zeitdilatation sind unzählige Male und unabhängig voneinander, durch zahlreiche Beobachtungen und Experimente, mit hoher Genauigkeit bestätigt worden.

Besonders zu nennen sind in diesem Zusammenhang die Lebensdauer von Myonen und das Hafele-Keating Experiment. Bei diesem Experiment wurden Atomuhren in Flugzeugen auf die Reise geschickt.

Joseph C. Hafele und Richard E. Keating brachten 1971 vier Cäsium-Atomuhren an Bord eines kommerziellen Linienflugzeugs, und flogen zweimal rund um die Welt, zuerst ostwärts, dann westwärts, und verglichen die Borduhren mit denen des United States Naval Observatory. Im Bezugssystem das sich in Ruhe bezüglich des Erdzentrums befindet, bewegt sich die Borduhr ostwärts in die Richtung der Erdrotation, und hat eine größere Geschwindigkeit als eine an der Erdoberfläche befindliche Uhr. Gemäß der speziellen Relativitätstheorie läuft die Borduhr langsamer als die Bodenuhr, und verliert also an Zeit. Hingegen die Borduhr die sich westwärts und damit entgegen der Erdrotation bewegt, hat eine geringere Geschwindigkeit als die Bodenuhr, und gewinnt also an Zeit. Die 1972 veröffentlichten Resultate der beobachteten Zeitgewinne bzw -verluste stimmten mit den relativistischen Vorhersagen innerhalb einer Genauigkeit von ~10% überein. Derartige Experimente wurden bereits mehrfach wiederholt und die gesteigerte Messgenauigkeit zeigte eine immer größere Übereinstimmung der Messergebnisse mit den Vorhersagen der Speziellen Relativitätstheorie.

Der Lorentz-Faktor

Man nennt den Faktor $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ auch Lorentz-Faktor. Er spielt eine herausragende Rolle in der SRT. Beträgt die Relativgeschwindigkeit zwischen zwei Inertialsystemen v , so lautet der Lorentz-Faktor

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.62)$$

Beispiele für die Auswirkung unterschiedlicher Relativgeschwindigkeiten auf die Zeitdilatation:

Relativgeschwindigkeit v	Lorentz-Faktor (Zeitdilatation)
Auto mit 100 km/h	$1+4,2 \cdot 10^{-15}$
Flugzeug mit 1000 km/h	$1+4,3 \cdot 10^{-13}$
50% * c	1,55

Myonenzerfall

Die Zeitdilatation scheint dem gesunden Menschenverstand zu widersprechen. Der Effekt lässt sich jedoch in der Praxis anhand des Myonenzerfalles beobachten.

Myonen sind Elementarteilchen mit Ladung $-e$ und Masse $206 \cdot m(\text{Elektron})$. Sie entstehen in der Erdatmosphäre in ca. 10km Höhe bei Reaktionen kosmischer Strahlung mit dem Erdatmosphären gas. Im Inertialsystem, in dem das Myon ruht (Labor), misst man eine Halbwertszeit von $\tau = 1,5 \mu\text{s}$ (Eigenzeit). Die atmosphärischen Myonen haben eine Geschwindigkeit von 99% der Lichtgeschwindigkeit.

Bevor sie zerfallen hätten sie nach nicht-relativistischer Rechnung somit eine Reichweite von ca. $\tau \cdot 0,99 \cdot c = 600\text{m}$ erreicht. Es dürften also so gut wie keine Myonen auf der Erdoberfläche ankommen.

ABER: Ein sehr hoher Anteil der in der Atmosphäre entstehenden Myonen gelangt trotzdem bis zur Erdoberfläche. Eine Erklärung ist nur mit der Zeitdilatation möglich.

Wenn ein Myon nach der Eigenzeit von $\tau = 1,5 \mu\text{s} = \tau_{\text{bewegt}}$ zerfällt, dann misst ein Beobachter auf der Erde die längere Zeit:

$$\Delta t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \tau \cdot \gamma_v = 33,5 \mu\text{s}$$

Ein Beobachter auf der Erde erhält für die Strecke, die das Myon zurücklegt deshalb $L = 33,5 \mu\text{s} \cdot 0,99c = 10\text{km}$.

Es kommt jedoch zu einem vermeintlichen Widerspruch, denn der Beobachter der mit dem Myon fliegt, erhält ja nur 600m. Eine Erklärung hierfür liefert der Effekt der sogenannten Längenkontraktion.

1.13 Die Längenkontraktion

Der Effekt der Längenkontraktion wird oftmals falsch interpretiert. Es handelt sich hier nicht um eine durch Kräfte erzeugte Komprimierung von Materie, sondern bezieht sich auf den räumlichen Maßstab (Metrik), mit dem ein in Bewegungsrichtung liegender Gegenstand, anhand unten stehender Längemessung, mittels Zeitmessung gemessen wird. Dieser Effekt tritt immer im Zusammenhang mit der Zeitdilatation auf. Er ist stets wechselseitig symmetrisch. Zur Herleitung des Effektes betrachten wir das Gedankenexperiment in der folgenden Abbildung

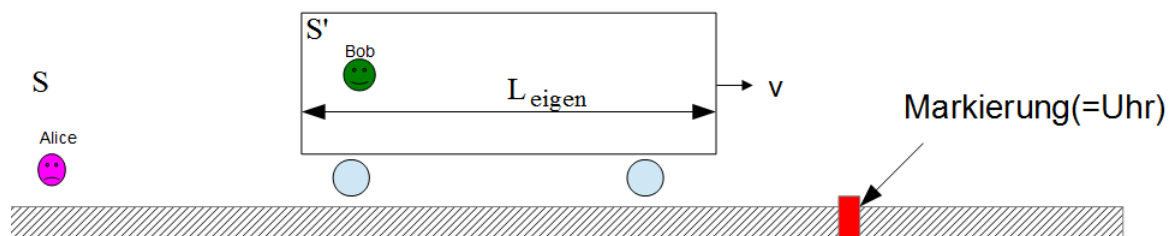


Abbildung 1.25: Gedankenexperiment zur Längenkontraktion

Bob in S' stellt die Länge seines Zuges mit einem ruhenden Maßstab fest. Er misst die sogenannte Eigenlänge L_{eigen} .

Alice in S hinin Bezug auf Stellt die Länge des sich mit Geschwindigkeit v in x -Richtung bewegten Zuges anhand der Zeitdifferenz der beiden Ereignisse A und B fest:

Ereignis A: „Vorderes Ende des Zuges fährt an einer einzigen Stoppuhr am Bahnsteig vorbei (=Markierung)“

Ereignis B: „Hinteres Ende des Zuges fährt an der einzigen Stoppuhr am Bahnsteig vorbei (=Markierung)“

In S wird also ein Eigenzeitintervall zwischen A und B gemessen: $\Delta\tau_{AB}$

In S' wird für die beiden Ereignisse jedoch kein Eigenzeitintervall gemessen, da in S' die Zeitmessung an verschiedenen Orten, am vorderen- und hinteren Ende stattfindet. Unter Berücksichtigung von (1.59) für das Eigenzeitintervall zwischen den Ereignissen A und B, erhält man also

In S' : Δt_{AB} L_{eigen} : *Eigenlänge*

$$\text{In } S : \Delta \tau_{AB} \quad L = v \Delta \tau_{AB} = v \Delta t_{AB} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = L_{eigen} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = L_{eigen} \gamma_v^{-1}$$

Eine räumliche Abmessung, die in Bewegungsrichtung liegt und mit einem ruhenden Maßstab bestimmt werden kann ist eine Eigenlänge. Es handelt sich aus relativistischer Sicht um den größten Wert für diese Länge. In Bewegungsrichtung liegende Maßstäbe erscheinen in anders bewegten Inertialsystemen verkürzt.

Wenn ich mich in S befinde und messe einen bewegten Maßstab, der in Bewegungsrichtung liegt zu L, dann muss ich diesen Wert mit dem Lorentz-Faktor γ_v multiplizieren um zu wissen, welche Eigenlänge er in S' hat.

Originalbeispiel von Einstein 1905 zur Längenkontraktion: „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“ [4]

Wir betrachten eine starre Kugel vom Radius R, welche in S' ruht und deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung von S' liegt. Die Gleichung der Oberfläche dieser Kugel in S' ist:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = R'^2$$

In S, welches sich mit v in x-Richtung relativ zu S' bewegt, gilt dann aber:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 = \gamma_v^2 x'^2 + y'^2 + z'^2$$

Ein starrer Körper, welcher in ruhendem Zustande ausgemessen die Gestalt einer Kugel hat, hat also in bewegtem Zustande – vom ruhenden System aus betrachtet – die Gestalt eines Rotationsellipsoides mit den Achsen

$$\gamma_v^{-1} R, \quad R, \quad R$$

Für $v=c$, schrumpfen alle bewegten Objekte – vom ruhenden System aus betrachtet – in flächenhafte Gebilde zusammen.

1.14 Die Lorentz-Transformation

Die Lorentz-Transformation kann ganz natürlich aus den Axiomen der Speziellen Relativitätstheorie und den sich daraus ergebenden Phänomenen der Zeitdilatation und Längenkontraktion abgeleitet werden. Ich werde im folgenden 2 äquivalente, besonders anschauliche Herleitungen zeigen. Beide gehen davon aus, dass S und S' die Relativgeschwindigkeit v in x -Richtung zueinander haben.

1. Herleitung aus der Längenkontraktion und der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Angenommen in S' misst jemand die x' -Koordinate eines Punktes mit einem Meterstab, dann legt er den Stab also x' -mal an. Es handelt sich in S' um eine Eigenlänge und deshalb ist der Meterstab gegenüber S länger! Ein Beobachter in S' rechnet also

$$x = x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = x' \gamma_v^{-1} \quad (1.63)$$

Wenn sich S' um die Strecke vt weiterbewegt hat, dann befindet sich der Punkt nun bei

$$x = x' \cdot \gamma_v^{-1} + vt \quad (1.64)$$

Daraus ergibt sich also durch Umformung für den Inertialbeobachter S die Umrechnung seiner räumlichen x -Koordinate nach S':

$$x' = \gamma_v (x - vt) \quad \text{bzw.} \quad \Delta x' = \gamma_v (\Delta x - v \Delta t) \quad (1.65)$$

Wie werden nun t und t' umgerechnet?

Gehen wir davon aus, dass S und S' bei $t=t'=0$, den räumlichen Versatz Δx zueinander haben. S' bewegt sich nun mit v . Ein Inertialbeobachter S schickt bei $t=t'=0$ einen Lichtblitz in Richtung S' los. Dieser legt die Strecke Δx in der Zeit $\Delta t = \Delta x/c$ zurück. Dies setzen wir einfach in (1.65) ein und erhalten damit für die Koordinaten der Wellenfront des Lichtblitzes

$$\Delta x' = c\Delta t' = \gamma_v \left(c\Delta t - \frac{v\Delta x}{c} \right) \quad \Rightarrow \quad \Delta t' = \gamma_v \left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2} \right) \quad (1.66)$$

Und damit natürlich auch

$$t' = \gamma_v \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \quad (1.67)$$

Die Gleichungen (1.65 - 1.67) sind die Lorentz-Transformationen. Aufgrund des Relativitätsprinzips, sind S und S' als Inertialsystem gleichberechtigt. Der Inertialbeobachter in S' erhält deshalb die Transformationsformeln aus (1.65) – (1.67), indem er einfach die „ungestrichenen“ Raum- und Zeitkoordinaten durch seine „gestrichenen“ Koordinaten ersetzt und die Geschwindigkeit v durch -v. Man nennt dies auch symmetrische Umkehrung.

2. Herleitung aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und dem Relativitätsprinzip

S und S' liegen bei $t=t'=0$ räumlich übereinander. S und S' bewegen sich ab $t=t'=0$ nur in x-Richtung mit v relativ zueinander. Beliebige Punktereignisse E werden in S bzw. S' wie folgt mit den entsprechenden Zeiten, bzw. räumlichen Koordinaten beschrieben:

$$\text{In } S : E(t_E, x_E)$$

$$\text{In } S' : E(t'_E, x'_E)$$

Forderung an die aufzustellende Transformation:

Gemäß dem Relativitätsprinzip muss es eine lineare Beziehung zur Umrechnung der Koordinaten des Ereignisses zwischen relativ zueinander bewegten Inertialsystemen geben. Wir beweisen diese Behauptung durch Widerspruch:

Wäre z.B. $t'=a \cdot t^2$, dann gäbe es in S eine gleichförmige Bewegung, die in S' keine gleichförmige Bewegung (=beschleunigte Bewegung) wäre. Dies würde das Auftreten von Kräften bedeuten. Dies ist ein Widerspruch zum Relativitätsprinzip. Deshalb

wählen wir folgenden linearen Ansatz mit einem noch unbekanntem Faktor k .

Lichtblitze bewegen sich in 2 beliebigen Inertialsystemen S und S' gleich schnell:

$$S': x' = ct' \rightarrow \text{Anforderung an Transformation: } x = ct = k(ct' + vt') = kt'(c+v)$$

$$S: x = ct \rightarrow \text{Anforderung an Transformation: } x' = ct' = k(ct - vt) = kt(c-v)$$

Wir multiplizieren beide Gleichungen und können dann nach dem Faktor k auflösen:

$$c^2 t t' = k^2 t t' (c-v)(c+v) = k^2 t t' (c^2 - v^2) \text{ und daraus folgt}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma_v$$

Der Faktor k erweist sich einfach als der bereits bekannte Lorentz-Faktor.

Die Ergebnisse beider äquivalenter Herleitungen werden nun folgendermaßen in den Gleichungen der Lorentz-Transformation zusammengefasst.

Die Lorentz-Transformation

Hat ein Ereignis E im Inertialsystem S die Koordinaten $E(t,x,y,z)$, dann hat es im Inertialsystem S' die Koordinaten $E(t',x',y',z')$. Wenn beide Inertialsysteme zur Zeit $t=t'=0$ übereinander liegen und die Relativbewegung nur in x-Richtung mit v stattfindet, dann werden die Koordinaten folgendermaßen ineinander umgerechnet

Für S	Für S'	
$t' = \gamma_v \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)$	$t = \gamma_v \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right)$	(1.68)
$x' = \gamma_v (x - vt)$	$x = \gamma_v (x' + vt')$	(1.69)
	$y' = y$	(1.70)
	$z' = z$	(1.71)

Für Koordinatendifferenzen zweier Punktereignisse A und B gilt dann:

Für S	Für S'	
$\Delta t'_{AB} = \gamma_v \left(\Delta t_{AB} - \frac{v\Delta x_{AB}}{c^2} \right)$	$\Delta t_{AB} = \gamma_v \left(\Delta t'_{AB} + \frac{v\Delta x'_{AB}}{c^2} \right)$	(1.72)
$\Delta x'_{AB} = \gamma_v (\Delta x_{AB} - v\Delta t_{AB})$	$\Delta x_{AB} = \gamma_v (\Delta x'_{AB} + v\Delta t'_{AB})$	(1.73)
	$\Delta y'_{AB} = \Delta y_{AB}$	(1.74)
	$\Delta z'_{AB} = \Delta z_{AB}$	(1.75)

Um also z.B. die räumliche x' -Koordinate eines physikalischen Prozesses, für den Beobachter in einem anderen Inertialsystem S' zu berechnen, muss man, wenn man sich in S befindet, die in S festgestellte (eigene) x -Koordinate mit seiner in S festgestellten (eigenen) t -Koordinate in der beschriebenen Weise mit dem Lorentz-Faktor verrechnen um NUR die ANDERE x' -Koordinate in diesem ANDEREN System zu erhalten. Das verblüffende ist also, dass die Zeitkoordinaten (t ungleich t') in diese Berechnung der rein räumlichen Koordinaten mit dem Lorentz-Faktor eingehen.

Es zeigt sich auch sehr schön, dass keines der beiden Inertialsysteme ausgezeichnet ist. Das erkennt man an der Symmetrie der Lorentz-Transformation. Sie unterscheidet

det sich zwischen S und S' nur in dem Vorzeichen für die Relativgeschwindigkeit und die Ersetzung der „ungestrichenen“ Größen durch „gestrichene“ und vice versa. Das ist ein erster starker Hinweis darauf, dass Raum- und Zeit nicht unabhängig voneinander sein können.

Aus der Lorentz-Transformation lassen sich die Zeitdilatation und die Längenkontraktion auch wiederum gewinnen.

Zeitdilatation: Finden in S' 2 Ereignisse am gleichen Ort statt ($\Delta x'=0$), aber zu verschiedenen Zeiten ($\Delta t' \neq 0$: Eigenzeitintervall), dann gilt für die Zeitdifferenz in S von S' aus mit seinen „gestrichenen“ Messgrößen berechnet:

$$\Delta t_{AB} = \gamma_v (\Delta t'_{AB} + 0) = \gamma_v \Delta t'_{AB} = \gamma_v \Delta \tau_{AB} \quad (1.76)$$

Längenkontraktion: Wenn ein Maßstab in S' ruht, dann $\Delta x' \neq 0$: Eigenlänge. In S können Anfangs- und Endpunkt gleichzeitig bestimmt werden ($\Delta t=0$):

$$\Delta x'_{AB} = \gamma_v (\Delta x_{AB} - v \Delta t_{AB}) = \gamma_v \Delta x_{AB} = L_{eigen} = \gamma_v L \quad (1.77)$$

Die Lorentz-Transformation (LT) in vollständig vektorieller Form

Stimmen beide Inertialsysteme S und S' bei $t=t'=0$ überein (keine Verdrehung der Achsen) und bewegen sie sich von da an, mit v in beliebiger Raumrichtung relativ zueinander, dann ist es sinnvoll die Koordinatendifferenzen von Ereignissen in Komponenten zu zerlegen. Und zwar in Komponenten parallel und senkrecht zur relativen Bewegungsrichtung. Die Komponenten senkrecht zur Bewegungsrichtung bleiben bei der LT unverändert.

Die Ortsvektoren in S und S' lauten in S' $\vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ und in S $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Vektorzerlegung:

$$S': \vec{r}' = \vec{r}'_{//v} + \vec{r}'_{\perp v}$$

$$S: \vec{r} = \vec{r}_{//v} + \vec{r}_{\perp v}$$

Abbildung 1.26 gibt eine Übersicht der betrachteten Vektoren.

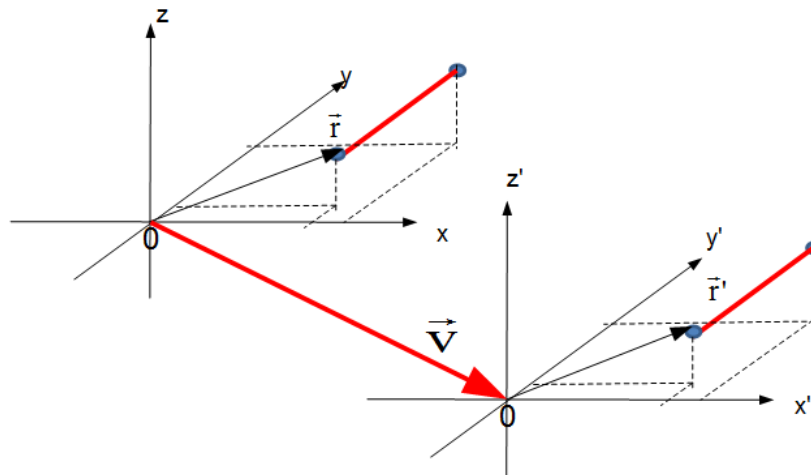


Abbildung 1.26: Vektorielle Form der Lorentz-Transformation

Die Komponenten senkrecht zur Relativgeschwindigkeit v bleiben bei LT unverändert:

$$\vec{r}'_{\perp v} = \vec{r}_{\perp v} = \vec{r} - \vec{r}_{//v} \quad (1.78)$$

Die Zerlegung eines Vektors in Richtung eines anderen Vektors ist aus der Vektorrechnung bekannt. Die Zerlegung des Ortsvektors von S , in Richtung des Geschwindigkeitsvektors v ergibt deshalb:

$$\vec{r}_{//v} = \underbrace{\frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v}}_{\cos \mathcal{G}} \cdot \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \quad (1.79)$$

$$r_{//v} = r \cos \mathcal{G}$$

Die Zerlegung der Ortsvektoren in S bzw. S' lautet dann ausführlich:

$$S: \quad \vec{r} = \vec{r}_{//v} + \vec{r}_{\perp v} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v^2} \cdot \vec{v} + \vec{r}_{\perp v} = r_{//v} \frac{\vec{v}}{v} + \vec{r}_{\perp v} \quad (1.80)$$

$$S': \quad \vec{r}' = \vec{r}'_{//v} + \vec{r}'_{\perp v} = \frac{\vec{r}' \cdot \vec{v}}{v^2} \cdot \vec{v} + \vec{r}'_{\perp v} = r'_{//v} \frac{\vec{v}}{v} + \vec{r}'_{\perp v} \quad (1.81)$$

Daraus ergibt sich mit (1.79) für den Ortsvektoranteil senkrecht zur Relativgeschwindigkeit

$$\vec{r}'_{\perp v} = \vec{r}_{\perp v} = \vec{r} - \vec{r}_{//v} = \vec{r} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v^2} \cdot \vec{v} \quad (1.82)$$

Die LT benötigt nur die Beträge der Komponenten parallel zu v. Für S ergibt die Anwendung der LT also:

$$r'_{//v} = \gamma_v (r_{//v} - vt) = \gamma_v \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v} - vt \right) \quad (1.83)$$

$$t' = \gamma_v \left(t - r_{//v} \cdot \frac{v}{c^2} \right) = \gamma_v \left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2} \right) \quad (1.84)$$

Man setzt nun diese LT-Formeln (1.83) und (1.84) in (1.81) ein und berücksichtigt (1.82). Dann erhält man die LT in vektorieller Form für S:

$$\vec{r}' = r'_{//v} \frac{\vec{v}}{v} + \vec{r}'_{\perp v} = \gamma_v \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v} - vt \right) \frac{\vec{v}}{v} + \vec{r}_{\perp v} = \gamma_v \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v} - vt \right) \frac{\vec{v}}{v} + \vec{r} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v^2} \cdot \vec{v} \quad (1.85)$$

Um die LT für S' zu erhalten muss man in (1.84) und (1.85) nur das Vorzeichen der Relativgeschwindigkeit v ändern und die „ungestrichenen“ Größen durch „gestrichene“ Größen, sowie die „gestrichenen“ durch „ungestrichene“ Größen ersetzen.

Wir fassen das nun zusammen:

Hat ein Ereignis E im Inertialsystem S die Koordinaten $E(t,x,y,z)$, dann hat es im Inertialsystem S' die Koordinaten $E(t',x',y',z')$. Wenn beide Inertialsysteme zur Zeit $t=t'=0$ übereinander liegen und die Relativbewegung mit v in beliebiger Raumrichtung stattfindet, dann werden die Koordinaten folgendermaßen ineinander umgerechnet:

Für S	Für S'	
$t' = \gamma_v \left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2} \right)$	$t = \gamma_v \left(t' + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{v}}{c^2} \right)$	(1.86)
$\vec{r}' = \gamma_v \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v} - vt \right) \frac{\vec{v}}{v} + \vec{r} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v^2} \cdot \vec{v}$	$\vec{r} = \gamma_v \left(\frac{\vec{r}' \cdot \vec{v}}{v} + vt' \right) \frac{\vec{v}}{v} + \vec{r}' - \frac{\vec{r}' \cdot \vec{v}}{v^2} \cdot \vec{v}$	(1.87)

Die SRT führt also bei physikalischen Vorgängen die sehr schnell, nahe der Lichtgeschwindigkeit ablaufen zu einer völlig neuen Vorstellung des Raumes und der Zeit. Dies wird auch einen Einfluss auf die Geschwindigkeitsaddition haben, wie wir sie aus Kapitel 1.5 kennen.

Bevor uns damit auseinandersetzen, sollen 2 der bekanntesten Paradoxa die im Zusammenhang mit der Längenkontraktion und der Zeitdilatation entstehen und Stoff zahlreicher Diskussionen liefern, erklärt werden. Es sei schon vorab darauf hingewiesen, dass es eindeutige physikalische Lösung für sie gibt. Deshalb sind beide eigentlich keine echten Paradoxa. Bei korrekter Anwendung der Gesetzmäßigkeiten der SRT und der richtigen Interpretation, gibt es keine kausalen Paradoxa und keine der Aussagen widerspricht dem Relativitätsprinzip, wonach niemand in einem Inertialsystem feststellen kann, dass er sich gleichförmig bewegt oder ruht.

Zwillingsparadoxon

Martin und Hans seien Zwillinge. Mit 18 Jahren stellen sich beide einem wissenschaftlichen Experiment. Hans braucht dabei nichts anderes zu tun, als ganz normal sein Leben hier auf der Erde weiter zu verbringen und jedes Jahr seinen Geburtstag am selben Tag zu feiern.

Martin jedoch hat sich bereit erklärt mit einem superschnellen Raumschiff ($v=0,5c$) zu einem $s=10LJ$ entfernten Planet zu reisen. Er soll dort angekommen wenden und mit

der gleichen Geschwindigkeit zurückfliegen.

Hans, der auf der Erde geblieben ist, feiert gerade seinen 58 Geburtstag, als Martin wieder auf der Erde eintrifft. Martin, der von der Reise zurückkommt erschrickt aber, als er sieht, dass Hans Geburtstagstorte bereits 58 Kerzen zieren, denn seine Torte ist gerade mal mit 53 Kerzen bestückt.

Wenn Hans ohne Relativitätstheorie rechnet, dann benötigt Martin für seine Reise die Zeit $t = 2 \cdot 10 \text{ LJ} / 0,5 \text{ LJ/J} = 40 \text{ Jahre}$.

Berücksichtigt Hans jedoch die Zeitdilatation dann erhält er $t' = 40 \text{ J} \cdot \sqrt{1 - 0,25c^2 / c^2} = 40 \text{ J} \sqrt{0,75} \approx 35 \text{ J}$.

Es scheint unglaublich dass Martin nach der Rückkehr jünger sein soll als Hans.

Man muss mit den bisherigen Kenntnissen argumentieren, dass genausogut Hans sich von Martin wegbewegt und deshalb ebenso die Zeit für ihn verkürzt sein sollte.

Im Rahmen des bisher besprochenen ist dies richtig.

Aber es ist trotzdem ein Trugschluss, denn Martin ist es, der bei Erreichen des Planeten abbremsen muss und umkehrt, nicht Hans. Es kann also nur Martin sein, der sich seine Bewegung geändert hat, indem er umkehrt.

Aufgrund des Relativitätsprinzips muss Martin tatsächlich weniger altern, als sein Zwilling auf der Erde. Wir werden nochmal in Kapitel 1.22.15 auf die exakte Beschreibung dieses Phänomens zurückkommen (Stichwort: Relativistischer Raketenflug). Im Rahmen unbeschleunigter Inertialsysteme kann das Zwillingparadoxon nicht aufgeklärt werden!

Bus- Garage Paradoxon

Ein Paradoxon, das die Längenkontraktion enthält ist das Bus-Garage Paradoxon. In eine Garage von 10m Länge soll ein 20m langer Bus hineingebracht werden.

Wird der Bus mit einer Geschwindigkeit von $0,87c$ in die Garage hineingefahren, dann verkürzt er sich von Alice in der Garage aus gesehen der Bus auf 10m, denn bei dieser Geschwindigkeit ist der Lorentz Faktor gleich 2.

Von Bob im Bus aus gesehen ist der Lorentz Faktor für die Garage aber ebenfalls 2, womit die Garage nur noch 5m lang ist. Der Bus wird also an der Rückwand der Garage zerschellen.

1.15 Die relativistische Addition von Geschwindigkeiten

In Kapitel 1.5 haben wir die klassische Addition von Geschwindigkeiten mit Hilfe der Galilei-Transformation hergeleitet. Wir wissen nun jedoch, dass diese nur für physikalische Vorgänge richtig ist, wenn sie mit kleinen Geschwindigkeiten - verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit - erfolgen. Das klassische Additionstheorem würde auch zu Geschwindigkeiten führen können, die höher als die Lichtgeschwindigkeit sind. Dies ist jedoch nicht möglich. Zur Herleitung des relativistischen Additionstheorems für Geschwindigkeiten gehen wir einfach noch einmal von dem Gedankenexperiment in Abbildung 1.8 aus, das hier noch einmal wiedergegeben wird (Abbildung 1.27). Unser Ziel ist es nun, das richtige Gesetz für die Addition von Geschwindigkeiten zu finden, wenn wir es mit Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit zu tun haben. Da dies ein sehr wichtiges Kapitel der Relativitätstheorie ist, sollen zwei äquivalente Herleitungen angegeben werden. Die erste Herleitung dient hauptsächlich der Anschaulichkeit und begnügt sich mit einfacher Mathematik. Die zweite Herleitung ist getragen von mathematischer Stringenz bei der Anwendung der Differentialrechnung. Damit sollen sowohl die mathematisch-abstrakt denkenden Leser, als auch die vorstellungskräftigen Leser angesprochen werden. Beiden zugrunde liegt das Gedankenexperiment in Abbildung 1.27. Bob, der sich im Zug befindet (S') und Alice, die am Bahnsteig (S) steht wollen die Geschwindigkeit des Spielzeugautos anhand ihrer eigenen Messwerte für den jeweils anderen mit Hilfe der gültigen Lorentz-Transformation umrechnen.

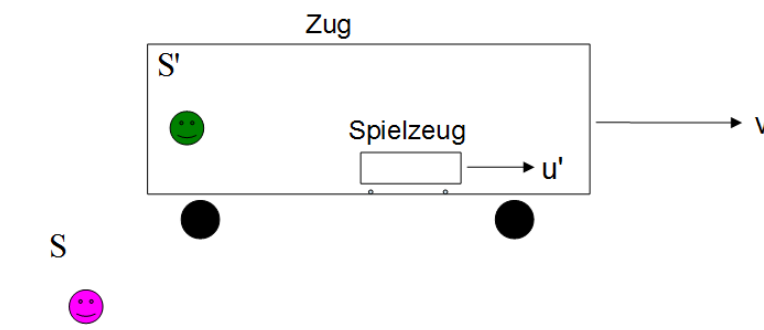


Abbildung 1.27: Gedankenexperiment zur relativistischen Geschwindigkeitsaddition

Bei der Geschwindigkeitsaddition, müssen von der Geschwindigkeit u , sowohl die Geschwindigkeitskomponenten parallel zur Relativbewegung der Inertialsysteme mit Geschwindigkeit v , als auch mögliche Geschwindigkeitskomponenten von u die senkrecht zu v liegen, separat berücksichtigt werden. Wir haben einen Hinweis darauf bereits in Kapitel 1.12, im Gedankenexperiment zur Zeitdilatation in Abbildung 1.24, erhalten.

1. Anschauliche Herleitung

Geschwindigkeitskomponente von u parallel zur Relativbewegung der Inertialsysteme S und S' mit Geschwindigkeit v :

Bob in S' errechnet zunächst die Geschwindigkeit des Spielzeuges aus seinen gemessenen („gestrichenen“) Größen

$$u'_{//v} = u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$$

Will er nun die Geschwindigkeit berechnen, die Alice in S misst, dann muss er für Δx und Δt , die Lorentz-Transformation anwenden (die rechte Spalte in (1.68) und (1.69))

$$u_{//v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}}$$

Er dividiert nun Zähler und Nenner dieses Bruches durch $\Delta t'$ und erhält

$$u_{//v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\Delta t'}}{\frac{\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}}{\Delta t'}} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v \cdot u'_x}{c^2}} = \frac{u'_{//v} + v}{1 + \frac{v \cdot u'_{//v}}{c^2}} \quad (1.88)$$

Alice in S kann die Geschwindigkeit des Spielzeugautos, die Bob misst, ebenfalls berechnen. Aus Symmetriegründen und der Gleichberechtigung von Inertialsystemen muss sie dazu in (1.88) nur die „gestrichenen“ Größen durch „ungestrichene“ ersetzen und das Vorzeichen der Relativgeschwindigkeit v umkehren.

$$u'_{\parallel v} = \frac{u_{\parallel v} - v}{1 - \frac{v \cdot u_{\parallel v}}{c^2}} \quad (1.89)$$

Beispiel: Wenn die Relativbewegung von Bob und Alice mit $v=1/2 \cdot c$ stattfindet und Bob die Geschwindigkeit des Spielzeugautos zu $u'=1/2 \cdot c$ misst, dann erhält Alice für die Geschwindigkeit des Spielzeugautos allerdings nur $u=4/5 \cdot c$.

Geschwindigkeitskomponente von u senkrecht zur Relativbewegung der Inertialsysteme mit v :

Wir erweitern unser Gedankenexperiment und Bob werfe einen Ball in senkrechter Richtung zu v , von unten nach oben an die Decke des Zugabteils (Abbildung 1.28). Wir wissen aus der Lorentz-Transformation bereits, dass sich der Abstand zwischen Decke und Boden nicht ändern darf. Wir werden jedoch trotzdem einen Einfluss auf die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Relativbewegung, aufgrund der Zeitdilatation erhalten

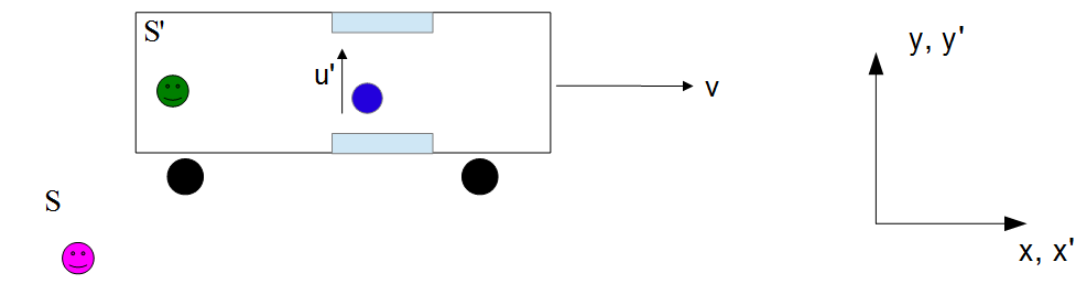


Abbildung 1.28: Gedankenexperiment zur relativistischen Geschwindigkeitsaddition

Bob in S' errechnet zunächst einfach wieder die Geschwindigkeit des Balles aus seinen gemessenen („gestrichenen“) Größen:

$$u'_{\perp v} = \frac{\Delta y'}{\Delta t'}$$

Will er nun die Geschwindigkeit berechnen, die Alice in S misst, dann muss er die Lorentz-Transformation nur für Δt anwenden (die rechte Spalte in (1.68) und (1.70)), denn es gilt mit (1.70): $\Delta y = \Delta y'$

$$u_{\perp v} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y'}{\gamma_v \left(\Delta t' + \frac{v \Delta x'}{c^2} \right)}$$

Er dividiert nun wie oben schon, Zähler und Nenner dieses Bruches durch $\Delta t'$ und erhält

$$u_{\perp v} = \frac{u'_{\perp v}}{\gamma_v \left(1 + \frac{u'_{//v} \cdot v}{c^2} \right)} \quad (1.90)$$

Alice benutzt davon einfach wieder die symmetrische Umkehrung wie im Falle der parallelen Geschwindigkeitskomponente beschrieben:

$$u'_{\perp v} = \frac{u_{\perp v}}{\gamma_v \left(1 - \frac{u_{//v} \cdot v}{c^2} \right)} \quad (1.91)$$

Die Formeln für u , in (1.90) und (1.91) gelten bei Relativbewegung von S und S' mit v in x-Richtung, sowohl für die y- als auch die z-Komponente von u , wenn es sich bei der Bewegung des Körpers mit Geschwindigkeit u , um eine dreidimensionale Bewegung handelt.

Bevor wir eine Zusammenfassung angeben, wird im folgenden Abschnitt wie bereits angekündigt, die soeben anschaulich abgeleiteten Gesetzmäßigkeiten zur relativistischen Geschwindigkeitsaddition, mit den Methoden der Differentialrechnung noch einmal errechnet.

2. Herleitung über Differentialrechnung

Geschwindigkeitskomponente von u parallel zur Relativbewegung der Inertialsysteme mit v :

$$\text{Bob in } S' : \quad u'_{//v} = u'_x = \frac{\partial x'}{\partial t'}$$

Bob in S' nutzt die erste partielle Ableitung für die Formel für x , der LT:

$$u_{//v} = u_x = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t} \quad (1.92)$$

Zur Auswertung von (1.92) benötigen wir also die partiellen Ableitungen von $\frac{\partial x}{\partial t'}$ und $\frac{\partial t'}{\partial t}$. Man erhält für die Ableitung von x aus (1.69 rechte Spalte)

$$\boxed{\frac{\partial x}{\partial t'} = \gamma_v \left(\frac{\partial x'}{\partial t'} + v \right)} \quad (1.93)$$

Es ergibt sich anhand der Lorentz-Transformation für die Ableitung von t' (1.68 linke Spalte)

$$\boxed{\frac{\partial t'}{\partial t} = \gamma_v \left(1 - \frac{v \cdot u'_{//v}}{c^2} \right)} \quad (1.94)$$

Wir setzen (1.93) und (1.94) in (1.92) ein und erhalten nach längerer Rechnung das Ergebnis

$$\boxed{u_{//v} = u_x = \frac{u'_{//v} + v}{1 + \frac{v \cdot u'_{//v}}{c^2}}} \quad (1.95)$$

Alice kann nun, wie oben in der anschaulichen Herleitung die Formel modifizieren indem sie das Vorzeichen von v umkehrt und die „gestrichenen“ durch „ungestrichene“ Größen ersetzt.

Wir wollen jedoch auch hier eine mathematisch strengere Ableitung angeben.

$$u'_{//v} = u'_x = \frac{\partial x'}{\partial t'} = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'}$$

Nun müssen also auch die symmetrischen Umkehrungen der partiellen Ableitungen aus (1.93) und (1.94) gebildet werden. Man erhält für diese ebenfalls aus den Formeln der Lorentz-Transformation (1.68) und (1.69)

$$\boxed{\frac{\partial x'}{\partial t} = \gamma_v \left(\frac{\partial x}{\partial t} - v \right)} \quad (1.96)$$

$$\boxed{\frac{\partial t}{\partial t'} = \gamma_v \left(1 + \frac{v \cdot u'_{//v}}{c^2} \right)} \quad (1.97)$$

Und damit

$$\boxed{u'_{//v} = u'_x = \frac{\partial x'}{\partial t'} = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} = \frac{u_{//v} - v}{1 - \frac{v \cdot u_{//v}}{c^2}}} \quad (1.98)$$

Geschwindigkeitskomponente von u senkrecht zur Relativbewegung der Inertialsysteme mit v:

$$\text{Bob in } S' : \quad u'_{\perp v} = \frac{\partial y'}{\partial t'}$$

Bob in S' wendet die LT an und beachtet dabei $dy = dy'$

$$\boxed{u_{\perp v} = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t'} \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial t'}} = \frac{u'_{\perp v}}{\gamma_v \left(1 + \frac{u'_{//v} \cdot v}{c^2} \right)}} \quad (1.99)$$

Alice erhält aus den gleichen Überlegungen wie zur parallelen Komponente, siehe Seite 74, folgende Formel für die relativistische Addition der Geschwindigkeit

$$\boxed{u'_{\perp v} = \frac{u_{\perp v}}{\gamma_v \left(1 - \frac{u_{//v} \cdot v}{c^2} \right)}} \quad (1.100)$$

Wir fassen die bisherigen Gesetzmäßigkeiten zur relativistischen Geschwindigkeitsaddition in folgender Tabelle zusammen. Anstelle eine Aufteilung in Koordinaten vorzunehmen, unterscheiden wir wie oben angegeben einfach in Größen parallel und senkrecht zur Relativbewegung der beiden Inertialsysteme S und S' mit Relativgeschwindigkeitsvektor \vec{v} in beliebiger Richtung:

Für S	Für S'	
$\vec{u}'_{//v} = \frac{\vec{u}_{//v} - \vec{v}}{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_{//v}}{c^2}}$	$\vec{u}_{//v} = \frac{\vec{u}'_{//v} + \vec{v}}{1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'_{//v}}{c^2}}$	(1.101)
$\vec{u}'_{\perp v} = \frac{\vec{u}_{\perp v}}{\gamma_v \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_{//v}}{c^2}\right)}$	$\vec{u}_{\perp v} = \frac{\vec{u}'_{\perp v}}{\gamma_v \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'_{//v}}{c^2}\right)}$	(1.102)

Die relativistische Addition von Geschwindigkeiten in vollständig vektorieller Form

Aus Gründen der Vollständigkeit, sollen hier noch die allgemeinen vektoriellen Formeln der relativistischen Geschwindigkeitsaddition angegeben werden. Ausgangspunkt für die mathematische Herleitung bilden wieder die LT, jedoch in der vektoriellen Form (1.86) und (1.87).

Für Bob in S' gilt mit seinen gemessenen Größen:

$$\vec{u}' = \frac{\partial \vec{r}'}{\partial t'}$$

Bob in S' wendet die LT an:
$$\vec{u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} \quad (1.103)$$

Zur Auswertung von (1.103) benötigen wir also die partiellen Ableitungen (u.a. (1.94)). Nach längerer Rechnung ergibt sich damit

$$\vec{u} = \frac{\vec{u}' + (\gamma_v + 1) \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{v^2} \cdot \vec{v} - \gamma_v \vec{v}}{\gamma_v \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2}\right)} \quad (1.104)$$

Und für Alice (S') aus analogen Überlegungen:

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u} + (\gamma_v - 1) \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{v^2} \cdot \vec{v} - \gamma_v \vec{v}}{\gamma_v \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{c^2} \right)} \quad (1.105)$$

Man kann zeigen: Wenn $u = c$, dann $u'^2 = c^2$

Mit den letzten beiden Formeln ergänzen wir unsere Tabelle mit den Berechnungsformeln für die relativistische Geschwindigkeitsaddition:

Für S	Für S'	
$\vec{u}'_{//v} = \frac{\vec{u}_{//v} - \vec{v}}{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_{//v}}{c^2}}$	$\vec{u}_{//v} = \frac{\vec{u}'_{//v} + \vec{v}}{1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'_{//v}}{c^2}}$	(1.106)
$\vec{u}'_{\perp v} = \frac{\vec{u}_{\perp v}}{\gamma_v \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_{//v}}{c^2} \right)}$	$\vec{u}_{\perp v} = \frac{\vec{u}'_{\perp v}}{\gamma_v \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'_{//v}}{c^2} \right)}$	(1.107)
$\vec{u}' = \frac{\vec{u} + (\gamma_v - 1) \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{v^2} \cdot \vec{v} - \gamma_v \vec{v}}{\gamma_v \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{c^2} \right)}$	$\vec{u} = \frac{\vec{u}' + (\gamma_v + 1) \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{v^2} \cdot \vec{v} - \gamma_v \vec{v}}{\gamma_v \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2} \right)}$	(1.108)

1.16 Die Wigner-Rotation und die Thomas-Präzession

Diese beiden relativistischen Effekte sind zunächst im Rahmen der Atomphysik aufgetaucht. Bei genauerer Untersuchung haben Wigner und Thomas entdeckt, dass beide Effekte sich bereits aus der Kinematik der SRT, genauer gesagt, der relativistischen Geschwindigkeitsaddition berechnen lassen.

Die Wigner-Rotation

Die vektorielle relativistische Geschwindigkeitsaddition kann folgende Fälle betreffen, dass 2 Geschwindigkeiten aus 2 verschiedenen Inertialsystemen gemessen und kombiniert werden. Wir unterscheiden nun 2 Fälle. Gemeinsames Ziel dieser Gedankenexperimente ist es jedoch, die Bewegung des blauen Balles von S aus mit einem resultierenden Geschwindigkeitsvektor u zu beschreiben.

Fall 1: v_1 wird von S gemessen, v_2 von S'	Fall 2: v_2 wird von S gemessen, v_1 von S'
Anwendung der Relativistischen Geschwindigkeitsaddition	
Fall 1	Fall 2
$\vec{u}_{21//} = \vec{v}_1$	$\vec{u}_{12//} = \vec{v}_2$
$\vec{u}_{21\perp} = \frac{\vec{v}_2}{\gamma_{v1}}$	$\vec{u}_{12\perp} = \frac{\vec{v}_1}{\gamma_{v2}}$
$\vec{u}_{21} = \vec{u}_{21//} + \vec{u}_{21\perp} = \vec{v}_1 + \frac{\vec{v}_2}{\gamma_{v1}}$	$\vec{u}_{12} = \vec{u}_{12//} + \vec{u}_{12\perp} = \vec{v}_2 + \frac{\vec{v}_1}{\gamma_{v2}}$
Ergebnis:	

$$\vec{u}_{21} \neq \vec{u}_{12}$$

$$|\vec{u}_{21}| = |\vec{u}_{12}| = \sqrt{\vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2 - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^2}}$$

Dass die resultierenden Vektoren zur Beschreibung der Bewegung des blauen Balles nur im Betrag, aber nicht in der Richtung übereinstimmen, ist äußerst verblüffend. Es ist also davon abhängig, aus welchem Inertialsystem heraus die Geschwindigkeit des Balles gemessen wird.

Abhängig von der Messung der Geschwindigkeit des Balles und der Relativgeschwindigkeit aus anderen Bezugssystemen ergeben sich in der Addition der Vektoren verschiedene Ergebnisse.

Es kann sogar ein Winkel Ω zwischen den beiden resultierenden Geschwindigkeitsvektoren $\vec{u}_{21}, \vec{u}_{12}$ angegeben werden. Dieser Winkel wird Wigner-Drehwinkel genannt.

$$\sin \Omega = \frac{|\vec{u}_{12} \times \vec{u}_{21}|}{|\vec{u}_{12}| \cdot |\vec{u}_{21}|} = \frac{v_1 v_2 \left(1 - \frac{1}{\gamma_{v_1} \cdot \gamma_{v_2}} \right)}{\vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2 - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^2}} = \frac{v_1 v_2 \gamma_{v_1} \gamma_{v_2}}{1 + \gamma_{v_1} \gamma_{v_2}} \quad (1.109)$$

Diese Formel gilt nur wenn die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 senkrecht zueinander stehen.

Die Thomas-Präzession

Die Thomas Präzession ist eine Konsequenz der Wigner-Rotation, wenn ein Inertialsystem eine Zentripetalkraft erfährt. Nehmen wir an, Alice und Bob fliegen jeder mit einem Raumschiff los, um den Mond zu erforschen und zu einer gegebenen Zeit t , haben beide die Geschwindigkeit v_1 von S aus gesehen. Für Alice ist Bob dann in Ruhe (Abbildung 1.29).

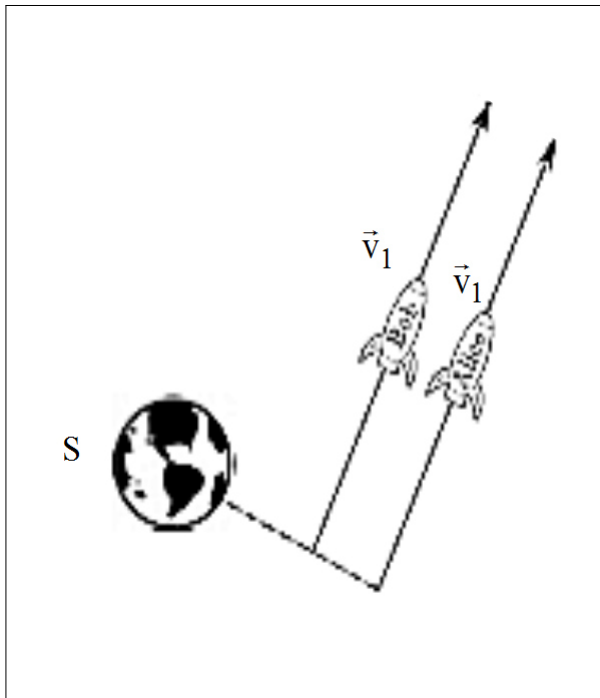


Abbildung 1.29: Gedankenexperiment zur Thomas-Präzession 1

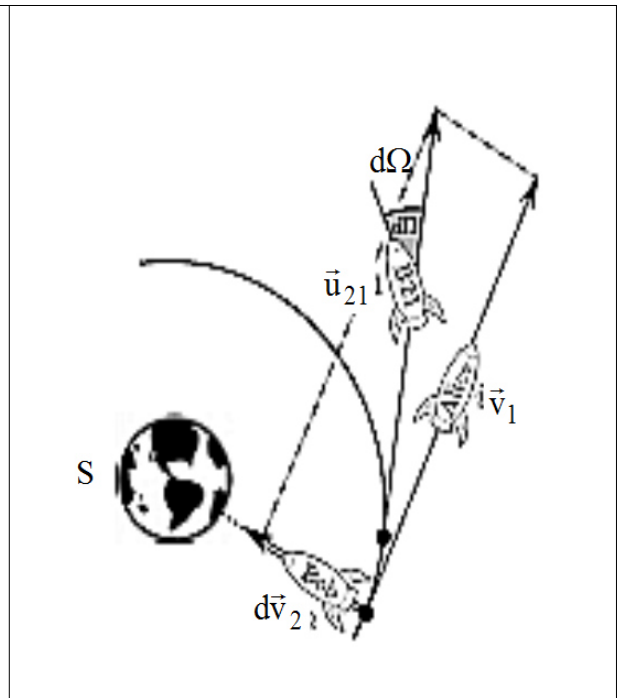


Abbildung 1.30: Gedankenexperiment zur Thomas-Präzession 2

Bobs Antrieb fällt plötzlich aus und er fällt aufgrund der Zentralkraft in eine sphärische Umlaufbahn um die Erde, während Alice weiterhin gleichförmig zum Mond fliegt (siehe Bild 1.30). Alice misst nun eine senkrechte Geschwindigkeit dv_2 von Bob. Zur Zeit $t+dt$ ist Bobs Geschwindigkeit relativ zu S die relativistische vektorielle Addition von dv_2 und v_1 und sein Inertialsystem hat sich um den infinitesimalen Wigner-Winkel $d\Omega$ in Bezug auf S gedreht. Die damit zusammenhängende zeitliche Änderungsgeschwindigkeit $\partial\Omega/\partial t$ ist die Thomas-Präzessionsrate.

Die Thomas-Präzessionsrate gibt also an, wie schnell sich Bobs Bezugssystem relativ zu S dreht. In unserem Beispiel sieht Alice, wie S mit $-v_1$ wegfliegt und Bob mit dv_2 und zwar aufgrund der Zentralkraft senkrecht dazu. Das bedeutet dass die abgeleitete Formel für den Wigner-Drehwinkel hier gültig ist:

$$d\Omega = v_1 \left(\frac{\gamma_{v1}}{1 + \gamma_{v1}} \right) dv_2$$

Daraus folgt für die Thomas-Präzessionsrate:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = a_r v_1 \left(\frac{\gamma_{v1}}{1 + \gamma_{v1}} \right) = \frac{v_r^2}{R} v_1 \left(\frac{\gamma_{v1}}{1 + \gamma_{v1}} \right)$$

a_r ist die radiale Bahnbeschleunigung (Zentral), R ist der Bahnradius und v_r die Bahngeschwindigkeit.

Die sogenannte Thomas Präzession ist dann der gesamte Wigner Drehwinkel, wenn Bob einen komplette geschlossene Kurve im Potential der Zentralkraft fliegen würde:

$$\boxed{\Omega_T = \oint_C \frac{\partial\Omega}{\partial t} dt} \tag{1.110}$$

1.17 Invarianz der elektromagnetischen Wellengleichung unter der Lorentz-Transformation

Die bisherigen Konsequenzen der Speziellen Relativitätstheorie erklären vor allem die Experimente zur konstanten Lichtgeschwindigkeit, ohne der Annahme eines Äthers als Ausbreitungsmedium für das Licht. Wir wollen nun untersuchen, ob die Lorentz-Transformation auch in theoretischer Hinsicht geeignet ist, diese Invarianz des Lichtes, als elektromagnetische Welle an Hand der elektromagnetischen Wellengleichung, zu beschreiben. Dieser Abschnitt ist wieder von erhöhter mathematischer Abstraktheit. Für das Verständnis der folgenden Kapitel ist er nicht wichtig und kann vom Leser getrost übersprungen werden.

Die Wellengleichung für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im Raum, hat in kartesischen Koordinaten die Form:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(t, x)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{E}(t, x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}(t, x)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}(t, x)}{\partial z^2} = \Delta \vec{E}(t, x)$$

In Operatorschreibweise mit dem Δ -Operator (Laplace-Operator) in kartesischen Koordinaten, lautet die Gleichung:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{E}(t, x) = \vec{0}$$

In der Klammer steht nun der sogenannte Beltrami-Operator. Wir müssen nur diesen Operator der Lorentz-Transformation unterwerfen um herauszufinden ob die Wellengleichung invariant ist in allen Inertialsystemen.

Wir benützen nur die 1 dimensionale Form des Beltrami-Operators:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (1.111)$$

Wir benötigen nun zunächst die allgemeinen partiellen Ableitungen einer Transformationsformel mit 2 variablen Größen. Der Leser sei hierzu auf Kapitel 1.7, Formel (1.44) verwiesen. Darauf wenden wir dann die Lorentz-Transformation an, indem wir differentiell vorgehen:

1. LT auf die Zeitkoordinate:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{1}{c} \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} = \gamma \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{v}{c} \frac{\partial}{\partial x'} \right)$$

2. LT auf die x-Koordinate:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} = -\gamma \left(\frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)$$

Wir setzen diese beiden Ausdrücke in (1.111) ein

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \quad (1.112)$$

Das bedeutet, dass die elektromagnetische Wellengleichung forminvariant unter einer Lorentz-Transformation ist, da der Beltrami-Operator forminvariant ist. In anderen Worten: Es ist dieselbe Wellengleichung, mit derselben Lösung, in beliebigen Inertialsystemen. Dies ist die theoretische Bestätigung dafür dass die Lichtgeschwindigkeit c in allen Inertialsystemen gleich ist. Auf Basis der Experimente, wie dem Michelson-Morley Versuch, kann dieses soeben vorgestellte Vorgehen als weitere Ableitung der Lorentz-Transformation angesehen werden.

Die y - und z - Koordinate bleiben bei der 1-dimensionalen Lorentz-Transformation unverändert.

1.18 Fresnelsche Mitführung / Doppler-Effekt / Aberration von Sternenlicht

Die rein kinematischen Gesetzmäßigkeiten der SRT, wie die Zeitdilatation, die Längenkontraktion und die relativistische Geschwindigkeitsaddition beschreiben einige entscheidende physikalische Phänomene, wie den Fresnelschen Mitführungskoeffizient, oder die Aberration des Sternenlichtes korrekt, ohne dass ein Rückgriff auf die Äthervorstellung nötig ist.

Die Fresnelsche Mitführungsformel

In Kapitel 1.8 haben wir gesehen, dass die Fresnelsche Mitführungsformel (1.50) phänomenologisch aus der Auswertung zahlreicher Experimente zur Ausbreitung von Licht in bewegter Materie, gebildet werden kann. Man betrachte dazu Abbildung 1.17.

Wenn sich also Licht in Wasser in x -Richtung ausbreitet und das Wasser selbst mit v_w in x -Richtung fließt, dann ergab die historische Rechnung der vorrelativistischen Betrachtung für den Experimentator in S (Kombination (1.49) und (1.50)):

$$c_{mit} = \frac{c}{n} + F \cdot v_w = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v_w \quad (1.113)$$

Die SRT zeigt, dass der Fresnelsche Mitführungskoeffizient F sich allein aus dem relativistischen Additionstheorem herleiten lässt. Zusätzliche Annahmen über die Natur der Lichtausbreitung im bewegten Medium sind dafür nicht erforderlich. Wenn die Richtung der beiden Geschwindigkeiten übereinstimmt, lautet das Additionstheorem (Formel (1.106) rechte Spalte) in S , da die Relativgeschwindigkeit zwischen S und S' (Wasser) $v=v_w$ ist:

$$c_{mit} = \frac{c'_{mit} + v_w}{1 + \frac{c'_{mit} \cdot v_w}{c^2}} \quad (1.114)$$

c'_{mit} ist dabei die Geschwindigkeit von Licht im Medium Wasser in S'

$$c'_{mit} = \frac{c}{n} \tag{1.115}$$

Setzen wir (1.115) in (1.114) ein, dann erhalten wir für die Geschwindigkeit des mitgeführten Lichtes in Wasser für einen Beobachter im Labor S :

$$c_{mit} = \frac{\frac{c}{n} + v_w}{1 + \frac{v_w}{nc}} = \frac{c}{n} \cdot \frac{1 + \frac{v_w n}{c}}{1 + \frac{v_w}{nc}} \tag{1.116}$$

Für kleine Geschwindigkeiten des Wassers $v_w \ll c/n$, liefert die Taylornäherung nach v_w in 1. Ordnung:

$$c_{mit} \approx \frac{c}{n} + v_w \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{c}{n} + F \cdot v_w \tag{1.117}$$

Dies ist eine sehr beeindruckende Bestätigung der SRT, da sich direkt der Fresnelsche Mitführungskoeffizient (1.113) ergibt.

Man kann die Fresnelsche Mitführungsformel sowie den Doppler-Effekt, auch gemäß folgender Überlegung herleiten, die von Max Born [2] gegeben wird:

Annahme: Die Anzahl der Wellenfronten, die vom Moment $t=t'=0$, den Punkt $x'=x=0$ verlassen und zur Zeit t_1 , bzw. t'_1 , damit auch x_1 bzw. x'_1 erreichen, ist in beiden Inertialsystemen S und S' gleich. Dies nennt man Invarianz der Wellenanzahl. Es muss also folgende Identität gelten:

$$f \cdot \left(t_1 - t_0 - \frac{x_1 - x_0}{c_{mit}} \right) \equiv f' \cdot \left(t'_1 - t'_0 - \frac{x'_1 - x'_0}{c'_{mit}} \right) \tag{1.118}$$

f : Frequenz des Lichtes in S

f' : Frequenz des Lichtes in S'

Diese Annahme ist gleichbedeutend damit, dass die Anzahl von Uhrschlägen in einem Inertialsystem S nicht anders sein kann, wenn sie von einem anderen Inertial-

system S' aus gemessen wird.

Hierauf wird nun einfach die Lorentz-Transformation angewendet, indem man die rechte Seite der Gleichung ersetzt

$$f \cdot \left(t_1 - t_0 - \frac{x_1 - x_0}{c_{mit}} \right) = f' \cdot \left(t'_1 - t'_0 - \frac{x'_1 - x'_0}{c'_{mit}} \right) = f' \sqrt{1 - \frac{v_w^2}{c^2}} \left(t_1 - t_0 - \frac{v_w}{c^2} (x_1 - x_0) - \frac{x_1 - x_0 - v_w(t_1 - t_0)}{c'_{mit}} \right) \quad (1.119)$$

Zu einem festen Zeitpunkt $t_1 - t_0 = 0$:

$$\frac{f}{c_{mit}} = f' \sqrt{1 - \frac{v_w^2}{c^2}} \left(\frac{v_w}{c^2} + \frac{1}{c'_{mit}} \right) \quad (1.120)$$

Andererseits an einem festen Raumpunkt $x_1 - x_0 = 0$:

$$f = f' \sqrt{1 - \frac{v_w^2}{c^2}} \left(1 + \frac{v_w}{c'_{mit}} \right) \quad (1.121)$$

Dividiert man (1.121) durch (1.120) dann erhält man

$$c_{mit} = \frac{1 + \frac{v_w}{c'_{mit}}}{\frac{v_w}{c^2} + \frac{1}{c'_{mit}}}$$

Zähler und Nenner dieses Bruches mit c'_{mit} erweitern liefert das gleiche Ergebnis wie (1.114)

$$c_{mit} = \frac{c'_{mit} + v_w}{1 + \frac{c'_{mit} v_w}{c^2}}$$

Der longitudinale Doppler-Effekt für Licht

Der Doppler-Effekt wurde bekannt durch Christian Doppler, der im Jahre 1842 Astronomen davon zu überzeugen versuchte, dass dieser Effekt die Ursache dafür sei, dass bei Doppelsternen zwischen den beiden Partnersternen Farbunterschiede erkennbar sind. Nach seiner Meinung kreisen diese Sterne so schnell umeinander, dass

die Farbe des gerade vom Beobachter hinweg bewegten Sterns mit einer Rotverschiebung wahrgenommen wird, während die Farbe des zulaufenden Sterns in den blauen Bereich des Spektrums verschoben ist. Dieser Effekt konnte nach dem Tode Dopplers tatsächlich durch die Vermessung von Spektrallinien nachgewiesen werden. Er ist aber zu gering, um wahrnehmbare Farbunterschiede zu erklären. Die tatsächliche Ursache für mit dem Auge erkennbare Farbunterschiede zwischen Sternen sind deren Temperaturunterschiede.

Zur Erklärung des Effektes stellte Doppler ein Gedankenexperiment mit der Laufzeit von Wasserwellen an, die im Minutentakt von einem fahrenden Boot aus erzeugt werden. Daraus leitete er auch eine mathematische Beschreibung ab. Ein Verdienst von Doppler ist die Erkenntnis, dass die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit auch eine Änderung der Wellenlänge des von bewegten Quellen eintreffenden Lichts bewirken muss. Im französischen Sprachraum wird dies oft Armand Fizeau (1848) zugesprochen.

Wir nehmen an, dass sich ein Empfänger in S und eine Lichtquelle (S') in x-Richtung mit Geschwindigkeit v voneinander wegbewegen (v ist negativ wenn sich beide aufeinander zubewegen). Wir betrachten den Vorgang zunächst von S' aus, in dem die Lichtquelle ruht. Wir sehen also, dass eine Wellenfront den Empfänger erreicht.

Die Wellenfront des Lichtes bewegt sich immer und in allen Inertialsystemen mit Geschwindigkeit c. In einer gegebenen Zeit t' (in S') bewegt sich jedoch der Empfänger mit v weg, sodass

$$\lambda' + vt' = ct'$$

Hieraus folgt

$$t' = \frac{\lambda'}{c - v} = \frac{c}{(c - v)f'} = \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)f'}$$

Aufgrund der relativistischen Zeitdilatation, misst der Empfänger in S jedoch für das Zeitintervall des Eintreffens der Impulse stets ein Eigenzeitintervall (Messung mit 1 Uhr am gleichen Ort in S). Deshalb gilt

$$t = \frac{t'}{\gamma_v} = t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Die dazugehörige Frequenz ist deshalb für den Empfänger in S:

$$f = \frac{1}{t} = \frac{\gamma_v}{t'} = \frac{1}{t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} f' = f' \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} = f' \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

Bezeichnen wir nun einfach allgemein die Empfängergrößen mit Index „E“ und die Quellgrößen, d.i. die Sendergrößen mit „S“ dann gilt

$$\boxed{f_E = f_S \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}} \quad (1.122)$$

Die Größe f_S/f_E wird als Doppler-Faktor der Quelle(Sender) relativ zum Empfänger bezeichnet.

$$\frac{f_S}{f_E} = \frac{\lambda_E}{\lambda_S} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (1.123)$$

Im Gegensatz zum Doppler-Effekt bei Schallwellen ist nur die Relativgeschwindigkeit (+v) zwischen Quelle/Sender und Empfänger wichtig.

Bei kleiner Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger $v \ll c$ gilt näherungsweise:

$$f_E = f_S \left(1 + \frac{v}{c}\right) \quad (1.124)$$

Für die Frequenzänderung gilt dann

$$\Delta f_E = f_S \frac{v}{c}$$

Der transversale Doppler-Effekt für Licht

Nach der klassischen Theorie sollte kein Doppler-Effekt auftreten, wenn die Richtung der Relativgeschwindigkeit v zwischen Quelle/Sender (in S') und Empfänger (in S) senkrecht zur Lichtausbreitung steht. Die Vorhersage des transversalen Dopplereffektes durch Einstein 1907, zählt zu den bemerkenswertesten experimentell bestätigten Vorhersagen der SRT. Abbildung 1.31 zeigt den Vorgang schematisch.

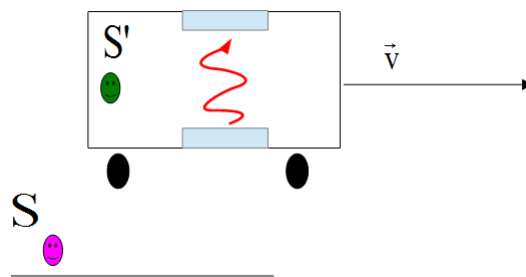


Abbildung 1.31: Gedankenexperiment zum transversalen Doppler-Effekt

Wir nutzen zur Argumentation nochmals die Invarianz der Anzahl der Wellenzüge (1.118), über Fresnelsche Mitführung von Max Born [2].

In S' ist die Entfernung des Anfanges des Lichtwellenzuges zur Zeit t'_0 bis zum Ende zur Zeit t'_1 in S' gleich $y'_1 - y'_0$. In S verwenden wir zunächst einen ganz allgemeingültigen Ansatz

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)$$

und setzen diesen in (1.118) ein

$$f \cdot \left(t_1 - t_0 - \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)}{c_{mit}} \right) = f' \cdot \left(t'_1 - t'_0 - \frac{y'_1 - y'_0}{c'_{mit}} \right)$$

Wir stellen uns vor dass sich S' so in x -Richtung hin- und herbewegt, dass $x_1 = x_0$ ist. Bei einer Reflektion des Lichts am oberen Spiegel und Empfang unten gilt ohnehin

$y_1=y_0$. Setzen wir dies ein, dann gilt, wenn die Relativgeschwindigkeit v zwischen Sender und Empfänger genau senkrecht zur Ausbreitung des Lichtes ist

$$f = \frac{f'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = f' \gamma \quad (1.125)$$

Mit den Indizes „S“ für Sender und „E“ für Empfänger gilt dann

$$f_E = \frac{f_S}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = f_S \gamma$$

Für den Empfänger ergibt sich also eine Blauverschiebung in diesem Fall, des geometrisch nächsten Aufeinandertreffens. Die moderne Literatur beschreibt jedoch auch Fälle, in denen es für den Empfänger zur Rotverschiebung des empfangenen Lichts kommt.

Die relativistische Erklärung für die Aberration von Sternenlicht

Vom Standpunkt der Erde aus, sollte das Licht von Sternen unter einem anderen Winkel eintreffen, als der Stern tatsächlich liegen sollte, da die Erde ständig gegenüber den Sternen in Bewegung ist.

Der sogenannte Effekt der Aberration ist dafür verantwortlich, dass die Lichtstrahlen von Objekten aus einem anderen Winkel wahrgenommen werden, wenn man sich senkrecht zur Lichtausbreitung bewegt. In Abbildung 1.32 stellt Φ den Aberrationswinkel dar:

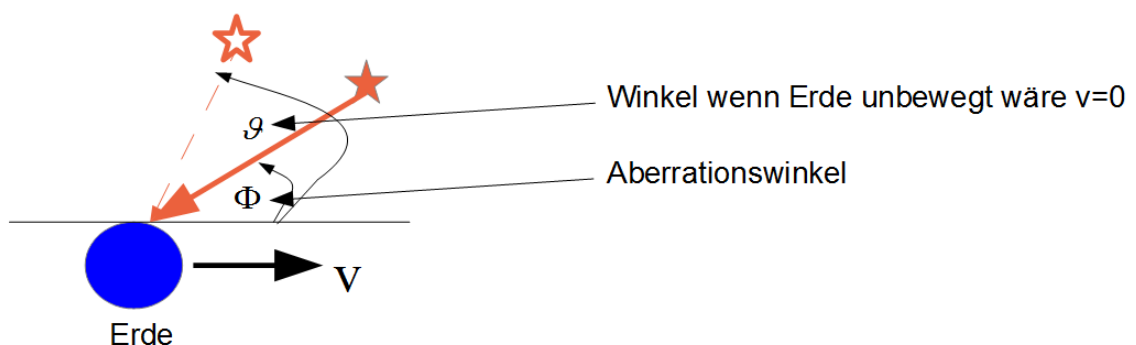


Abbildung 1.32: Schematische Darstellung der Aberration von Sternenlicht

Die Richtung des einfallenden Sternenlichtes unter dem Winkel Φ von der Erde (Inertialsystem S') aus gesehen ist ein anderer Winkel, als der vom Inertialsystem S der Sonne aus gesehen ϑ . Der Grund dafür ist die Bewegungsgeschwindigkeit der Erde relativ zum betrachteten Stern.

Die Aberration kann nun als Differenz der beiden Winkel betrachtet werden. Als analoges Beispiel betrachten wir den Fall von Regen. Wenn wir still stehen und es regnet, dann scheint der Regen exakt von oben zu kommen. Wenn wir uns bewegen (S') wird der Regen jedoch unter einem Winkel in unser Gesicht fallen.

Zur Beschreibung der Aberration von Sternenlicht betrachten wir nun die Quelle des Lichtes, nämlich den Stern als Inertialsystem S , während wir auf der Erde uns im Inertialsystem S' (gegenüber S mit v) befinden.

Die vollständige Erklärung dieses Phänomens gelingt bei hohen Relativgeschwindigkeiten nur mit der SRT. Wir wollen uns die historischen Erklärungsversuche für die Aberration von Sternenlicht genauer ansehen.

Klassische Erklärung von J. Bradley 1727

Bradley gab 1727 eine erste Erklärung für dieses Phänomen ohne Relativitätstheorie, die nur näherungsweise korrekt ist. Er ging von der Korpuskulartheorie des Lichtes aus, nach dem Licht aus Teilchen besteht, die nicht von der Gravitation beeinflusst werden.

Nehmen wir an, der Stern wird auf der Erde mit einem Teleskop beobachtet. Zunächst berücksichtigen wir die Bewegung der Erde nicht, dann dringt das Licht oben in das Teleskop unter dem Winkel ϑ ein und bewegt sich mit Geschwindigkeit c . Es benötigt die Zeit h/c um die Linse unten am Teleskop zu erreichen.

Nehmen wir nun an, dass sich während der Beobachtung, die Erde mit Geschwindigkeit v bewegt (s. Abbildung 1.33). Wir betrachten den Vorgang von der Erde aus:

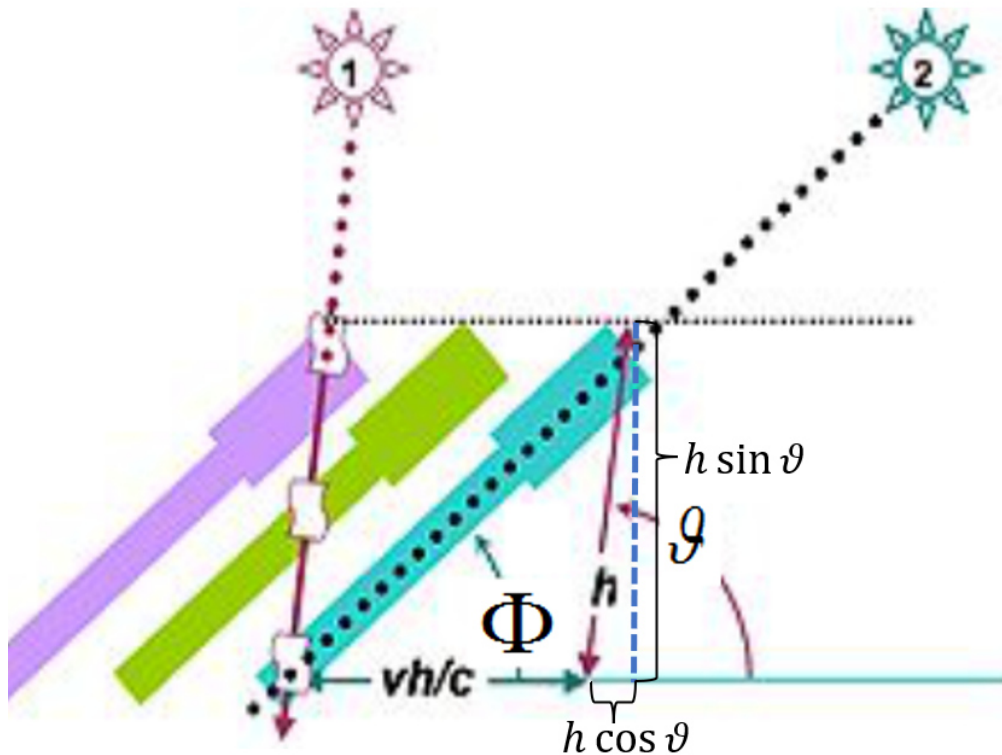


Abbildung 1.33: Schematische Darstellung der Aberration von Sternenlicht 2

Während des Durchganges des Lichtes bewegt sich das Teleskop selbst um den Betrag vh/c in x -Richtung. Aus diesem Grund muss das Teleskop um den Winkel Φ anstatt ϑ ausgerichtet werden. Dies resultiert in einer scheinbaren Position des Sterns unter dem Winkel Φ . Da die Erde auf ihrem Orbit ständig die Richtung ändert, muss sich auch Φ ändern. Der augenscheinliche Winkel Φ und der tatsächliche Winkel ϑ sind folgendermaßen trigonometrisch verknüpft (siehe Abb. 1.33):

$$\tan \Phi = \frac{h \sin \vartheta}{\frac{hv}{c} + h \cos \vartheta} = \frac{\sin \vartheta}{\frac{v}{c} + \cos \vartheta} \quad (1.126)$$

Wenn $\vartheta = 90^\circ$, dann $\tan(\vartheta - \Phi) = v/c$. Dieses Ergebnis erlaubte es Bradley eine der ersten Messungen der Lichtgeschwindigkeit durchzuführen.

Alternative Erklärung der klassischen Physik

Im System der Sonne (S), welche wir nun als ruhend annehmen wollen, werde ein Lichtstrahl mit Lichtgeschwindigkeit c ausgesendet. Er habe x - und y -Komponenten u_x und u_y , sodass $\tan \vartheta = u_y / u_x$. Wenn die Erde (S') sich mit Geschwindigkeit v in x -Richtung relativ zum Stern bewegt, dann muss aufgrund der klassischen Galilei-Transformation sich die Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung der Erde S' ändern: $u'_x = u_x - v$. Die y -Komponente ändert sich dagegen nicht: $u_y = u'_y$. Damit ergibt sich wieder eine Formel die nur näherungsweise korrekt ist

$$\tan \Phi = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{u_y}{u_x - v} = \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta - v/c} \quad (1.127)$$

Dies ist äquivalent zu (1.126).

Relativistische Erklärung

Die relativistische Erklärung liefert die korrekte Aberrationsformel. Die Herleitung ist grundsätzlich dieselbe wie gerade eben, nur dass die relativistische Geschwindigkeitsaddition (1.106) – (1.107) benutzt werden muss.

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma_v \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}$$

Man setzt diese beiden Formeln einfach in die entsprechenden Ausdrücke von (1.127) ein und erhält die vollständige Aberrationsformel:

$$\boxed{\tan \Phi = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{u_y}{\gamma_v (u_x - v)} = \frac{\sin \vartheta}{\gamma_v (\cos \vartheta - v/c)}} \quad (1.128)$$

1.19 Der Minkowski-Raum

Stellen wir uns eine punktförmige Lichtquelle im Ursprung eines Inertialsystems S vor, die zum Zeitpunkt $t=t'=0$ einen Lichtblitz aussendet. Dieser breitet sich homogen im Raum mit der Geschwindigkeit c aus. Die Wellenfront stellt die Oberfläche einer Kugel dar. In der zweidimensionalen x - y Ebene ist dies ein Kreis, wie in der Abbildung zu erkennen. Gleichzeitig startet S' mit v in x -Richtung. Jeder Raumpunkt x,y,z wird genau dann von der Wellenfront erreicht, wenn diese die Strecke ct zurückgelegt hat.

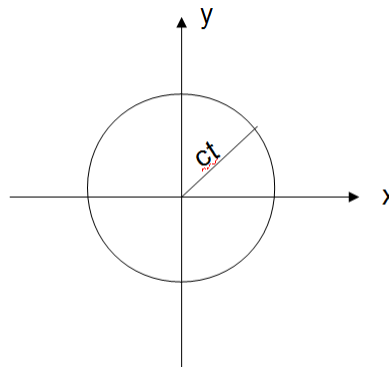


Abbildung 1.34: Wegelement einer Lichtfront

Für alle Punkte auf der Wellenfront gilt die Gleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (1.129)$$

Wenn wir uns zunächst nur für die Punkte der Wellenfront auf der x -Achse interessieren, so gilt: $x^2=c^2t^2$, also $x=ct$.

Nehmen wir nun an, dass der Beobachter (S'), der sich mit v relativ zu obigem Inertialsystem in x -Richtung bewegt, den Lichtstrahl sozusagen verfolgt. Zum Zeitpunkt $t=t'=0$, während der Aussendung des Lichtblitzes, seien die Ursprünge der beiden Inertialsysteme direkt übereinander.

Wie würde der bewegte Beobachter seine Koordinate die Wellenfront und damit die x' Koordinate beschreiben? Mit der Galilei-Transformation würde er $x'=ct-vt=(c-v)t$ erhalten. Doch dies ist nachweislich nicht korrekt.

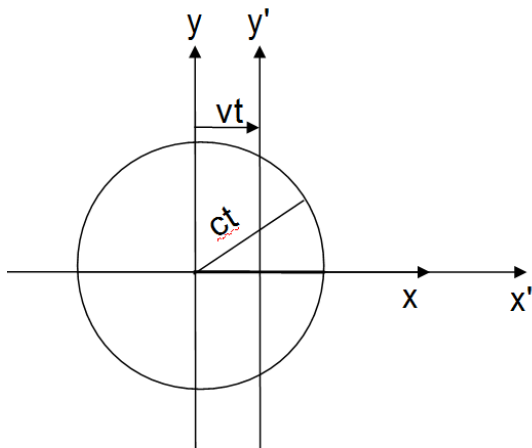


Abbildung 1.35: Wegelement einer Lichtfront

In S' muss ebenfalls eine derartige Kugelwellengleichung (1.129) gelten, da c in allen Inertialsystemen gleich ist:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \tag{1.130}$$

Wendet man die Lorentz-Transformation auf eine der beiden Gleichungen an, so erhält man genau die jeweils andere als Ergebnis. Wir setzen also für Δt und Δx , die Formeln der Lorentz-Transformation ((1.72) und (1.73) rechte Spalte) in (1.129) ein

$$\begin{aligned} c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 &= c^2 \gamma^2 (\Delta t' + (v/c^2) \Delta x')^2 - \gamma^2 (\Delta x' + v \Delta t')^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 = \\ &= c^2 \gamma^2 (1 - (v^2/c^2)) \Delta t'^2 - \gamma^2 (1 - (v^2/c^2)) \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 = \\ &= c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \end{aligned}$$

Also gilt unter LT für Lichtblitze in zwei Inertialsystemen, die sich zum Zeitpunkt $t=t'=0$ übereinander befinden

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 = 0 \tag{1.131}$$

Für Vorgänge und Bewegungen, für die sich die Koordinatenabstände langsamer als für Licht ändern, muss gelten:

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 > 0 \quad (1.132)$$

Man definiert deshalb als Verallgemeinerung des pythagoreischen räumlichen Abstandes (1.21), den quadrierten „Raum-Zeitlichen Abstand“ der unabhängig von der gleichförmigen Bewegung eines Objektes ist:

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2 := c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \geq 0 \quad (1.133)$$

Bei infinitesimal kleinen Abständen kann man auch schreiben:

$$ds^2 = ds'^2 := c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \geq 0$$

Man nennt es auch das quadrierte Raum-Zeit-Intervall, auch quadrierter Raum-Zeit Abstand oder Weltabstandsquadrat zwischen Raum-Zeit Punkten. Raum-Zeit Punkte werden auch als Punkt ereignisse bezeichnet. Jedem Punkt ereignis E kann man die Koordinaten zuordnen:

$$\text{In } S: E(t, x, y, z) \quad \text{oder} \quad E(ct [Ls], x [Ls], y [Ls], z [Ls])$$

$$\text{In } S': E(t', x', y', z') \quad \text{oder} \quad E(ct' [Ls], x' [Ls], y' [Ls], z' [Ls])$$

In unserem Beispiel (Abb. 1.35) hatten wir es stets mit dem Ereignis E, aber zu einem späteren Zeitpunkt zu tun, als die Wellenfront bereits den Punkt $x=ct$ erreicht hat:

E: „Am räumlichen Ursprung zur Zeit $t=t'=0$ wird ein Lichtblitz mit sphärischer Wellenfront ausgesendet, S' nimmt die Verfolgung mit v in x-Richtung ab $t=t'=0$ auf“

$$\text{In } S: E(t = 0s, x = 0m, y = 0m, z = 0m) \quad \text{oder} \quad E(ct = 0Ls, x = 0Ls, y = 0Ls, z = 0Ls)$$

$$\text{In } S': E(t' = 0s, x' = 0m, y' = 0m, z' = 0m) \quad \text{oder} \quad E(ct' = 0Ls, x' = 0Ls, y' = 0Ls, z' = 0Ls)$$

Relativistische Phänomene, wie den Verlust von Gleichzeitigkeit zwischen Bezugssystemen, stellt man anschaulich in sogenannten Minkowski-Diagrammen dar. Es handelt sich um Raum-Zeit Diagramme in denen jeder Punkt ein „Ereignis“ darstellt. Jedes Ereignis ist im Inertialsystem S anhand der Koordinaten (t,x,y,z) gegeben. Das

gleiche Ereignis wird von einem relativ dazu bewegten Inertialsystem S' mit den Koordinaten (t',x',y',z') beschrieben.

Die Kurven im Raum-Zeit Diagramm heißen Weltlinien. Stellen wir uns ein Labor vor, der Koordinatenursprung befinde sich auf dem Experimentiertisch. An der Stelle $x=1$ soll eine Stoppuhr liegen. Obwohl sich die Stoppuhr nicht bewegt, wird Ihre Position im Raum-Zeit Diagramm als Linie dargestellt (siehe Abbildung 1.36). Die Stoppuhr bewegt sich also gewissermaßen nur durch die Zeit. Ihre Weltlinie hat die Koordinaten $(x=1,y=0,z=0,t)$

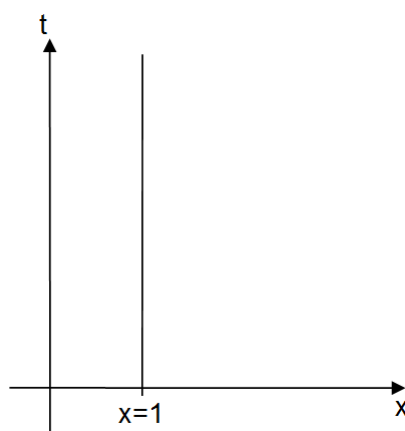


Abbildung 1.36: Weltlinie eines ruhenden Gegenstandes bei $x=1$

Der Weltlinie des Körpers am Ort $x=1$ entspricht dieser Ort zu allen Zeiten t . In diesem Sinne bedeutet die Weltlinie des Ursprunges $x=0$, den Ort des Ursprunges zu allen Zeiten t . Das ist die t -Axe. Die Stoppuhr bewegt sich also rein zeitlich fort. In diesem Sinn ist eine rein räumliche Bewegung der Stoppuhr unmöglich. Rein räumliche Bewegungen würden im dargestellten Diagramm durch parallele Linien zur x -Achse gegeben sein. Dies würde bedeuten, dass sich die Stoppuhr zu einem bestimmten gegebenen Zeitpunkt t , an allen Orten gleichzeitig aufhalten könnte. Jeder Ortswechsel erfordert jedoch eine Bewegung der Stoppuhr mit endlicher Geschwindigkeit, da das „beamen“ materieller Gegenstände zum Zeitpunkt als dieses Buch geschrieben wurde, noch nicht möglich war.

Je schneller die Bewegung vorstatten geht, desto größer muss die Geschwindigkeit sein und desto flacher wäre die Weltlinie. Wir kennen bereits die maximale Ge-

schwindigkeit zwischen Ereignissen. Es ist die Lichtgeschwindigkeit c . Im folgenden Diagramm (Abb. 1.37) ist die Bewegung eines Körpers mit Geschwindigkeit v =konstant in x -Richtung dargestellt.

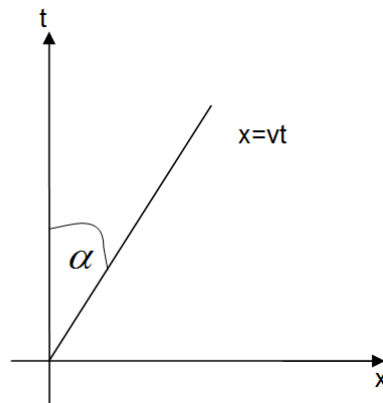


Abbildung 1.37: Weltlinie eines mit Geschwindigkeit v in x -Richtung bewegten Gegenstandes

Die Weltlinie des mit v bewegten Gegenstandes schließt mit der t -Achse den Winkel α ein. Es muss sich nicht um einen materiellen Körper handeln. Es könnte sich hierbei auch um den räumlichen Ursprungspunkt eines zweiten Inertialsystemes S' handeln, der sich mit v , in x -Richtung bewegt. Der Winkel α kann nicht beliebig groß sein, da die Grenzgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit ist.

Wir nehmen nun an, dass im Ursprung des Inertialsystemes S sich eine Blitzlampe befindet und diese wird zum Zeitpunkt $t=0$ eingeschaltet. Interessieren wir uns nur für die Punkte der Wellenfront auf der x -Achse, so kennen wir bereits die Weltlinie des Lichtblitzes. Sie ist gegeben durch die Gleichung $x=ct$. Im Raum-Zeit-Diagramm sieht dies folgendermaßen aus

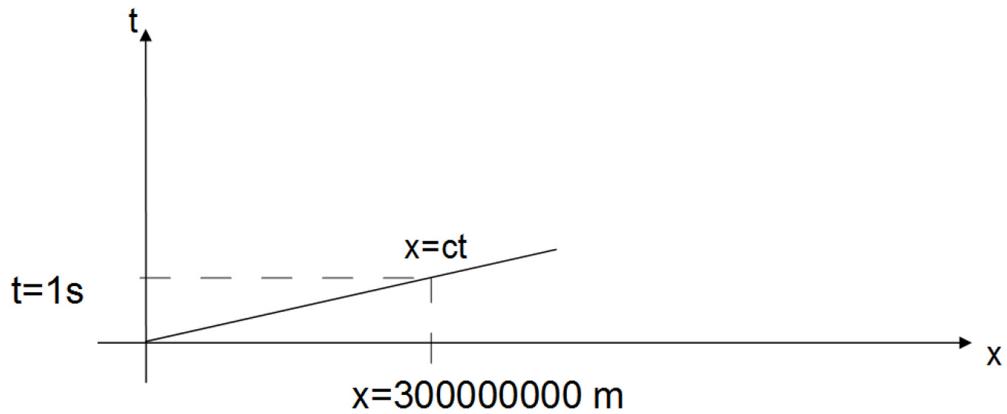


Abbildung 1.38: Weltlinie eines Lichtstrahles, der bei $t=0$ in x - Richtung ausgesendet wird

Da die Lichtgeschwindigkeit c in allen Inertialsystemen gleich groß ist und da c die maximale Grenzgeschwindigkeit für die Bewegung ist, werden Minkowski-Diagramme folgendermaßen normiert:

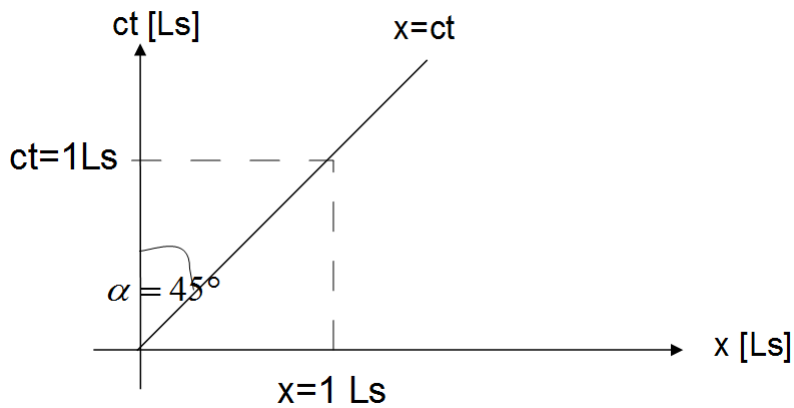


Abbildung 1.39: Weltlinie eines Lichtstrahles, der bei $t=0$ in x - Richtung ausgesendet wird im normierten Minkowski-Diagramm

Für den Winkel α , den die Weltlinie des Lichtstrahles mit der ct -Achse einschließt gilt

$$\tan \alpha = \frac{\Delta x}{c\Delta t} = \frac{\Delta x}{c \frac{\Delta x}{c}} = \frac{c}{c} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45^\circ \quad (1.134)$$

Alle Punktereignisse E haben in diesem Minkowski-Diagramm die Koordinaten

$$E(ct[Ls], x[Ls], y[Ls], z[Ls])$$

Ein Lichtblitz mit sphärischer Wellenfront stellt für $z=0$ in der 3 dimensionalen Raumzeit-Struktur (ct, x, y) bezüglich der ct -Achse einen rotationssymmetrischen Doppelkegel dar, weil $c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0$. Dieser Doppelkegel wird auch als „Lichtkegel“ bezeichnet. Der Lichtkegel ist von fundamentaler Bedeutung für die Kausalitätsbeziehungen zwischen Ereignissen O und E (in diesem Diagramm, Abb. 1.40) der Speziellen Relativitätstheorie und der Elektrodynamik. Es gibt keine Weltlinien für einen bewegten Körper, der flacher verläuft als der 45° Winkel des Lichtkegels.

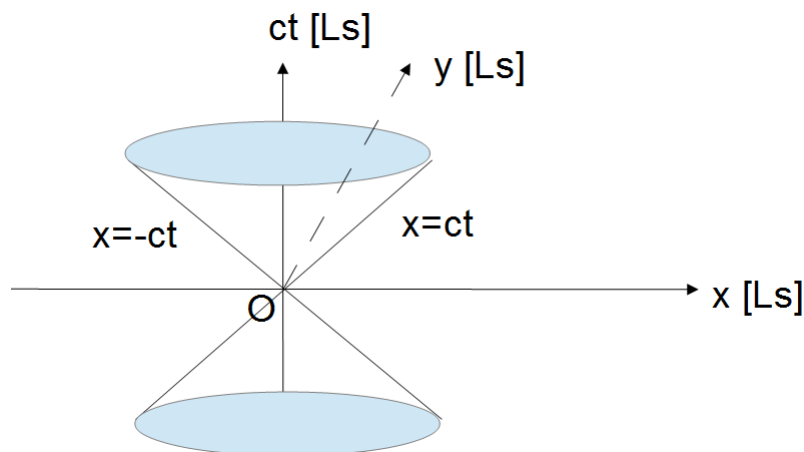


Abbildung 1.40: Schematische Darstellung des Lichtkegels

Der Ursprung ist das Punktereignis O mit der Bedeutung: „Aussenden eines Lichtblitzes zur Zeit $t=0$ vom Ursprung, in den Raum“

Lichtartige Ereignispaare

Bezüglich O, gilt für alle Ereignisse, die vom Lichtstrahl in S und S' ausgelöst werden können

$$ds^2 = ds'^2 := c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \geq 0$$

Im Diagramm sind dies alle Ereignisse mit Koordinaten oberhalb $ct=0$, die auf $x=\pm ct$ liegen. Unterhalb von $ct=0$, liegen auf den Weltlinien des Lichtstrahles $x=\pm ct$ all jene Ereignisse, die mit Lichtgeschwindigkeit zum Ereignis bei O geführt haben.

Für Ereignisse, die durch Lichtstrahlen mit O verbunden sind, gilt also:

$$ds^2 = ds'^2 := c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = 0$$

Und deshalb: $ds = ds' = 0$

Jedes dieser Ereignisse E bildet mit Ereignis O ein sogenanntes lichtartiges Ereignispaar.

Zeitartige Ereignispaare

Innerhalb des Lichtkegels, oberhalb von $ct=0$, gilt für Ereignispaare E und O in S und S':

$$ds_{OE}^2 = ds'_{OE}{}^2 = c^2 dt_{OE}^2 - dx_{OE}^2 - dy_{OE}^2 - dz_{OE}^2 = c^2 dt'_{OE}{}^2 - dx'_{OE}{}^2 - dy'_{OE}{}^2 - dz'_{OE}{}^2 > 0$$

Die Verbindungslinie ist bei gleichförmiger Bewegung eine Gerade, steiler als die des Lichtes! Die Menge aller Ereignisse E, innerhalb dieses sogenannten „Vorwärtslichtkegels“ können von der Bewegung eines materiellen Körpers, der bei $t=t'=0$ startet, hervorgerufen werden. Diese Ereignisse E bilden die relativistische Zukunft von O (s. auch Abb. 1.41), die alle Vorgänge der SRT und Elektrodynamik berücksichtigt.

$$ds_{OE} = ds'_{OE} = +\sqrt{\quad} > 0$$

Innerhalb des Lichtkegels, aber unterhalb von $ct=0$, liegen alle Ereignisse E, die durch die Bewegung eines materiellen Körpers zum Ereignis O geführt haben können:

$$ds_{OE}^2 = ds'_{OE}{}^2 = c^2 dt_{OE}^2 - dx_{OE}^2 - dy_{OE}^2 - dz_{OE}^2 = c^2 dt'_{OE}{}^2 - dx'_{OE}{}^2 - dy'_{OE}{}^2 - dz'_{OE}{}^2 > 0$$

Die Menge aller Ereignisse E, innerhalb dieses „Rückwärtslichtkegels“ bilden die relativistische Vergangenheit von O.

$$ds_{OE} = ds'_{OE} = -\sqrt{>0}$$

Ereignispaare für die dies gilt heißen also zeitartige Ereignispaare. Sie liegen „materiell bewegungskausal“ zueinander. Dies berücksichtigt alle Vorgänge, die durch die Spezielle Relativitätstheorie und die Elektrodynamik beschrieben werden können. Es ist denkbar dass im Rahmen neuer physikalischer Theorien dies nicht zwingend gilt.

Raumartige Ereignispaare

Für Ereignispaare OE, bei denen E oberhalb von $ct=0$ liegt, jedoch unterhalb des Lichtkegels, ist die direkte Weltlinie von O nach E, bei gleichförmiger Bewegung, eine Gerade, die flacher verläuft als die des Lichtes. Solche Ereignispaare liegen nicht „bewegungskausal“ zueinander. E liegt zwar in der Zukunft von O, aber ist durch keinen (ausgenommen quantenmechanische Verschränkung) Vorgang erreichbar.

$$ds_{OE} = ds'_{OE} = +\sqrt{<0}$$

Ereignisse E unterhalb von $ct=0$, jedoch außerhalb des Lichtkegels liegen zwar in der Vergangenheit von O, sind aber zum dortigen Zeitpunkt so weit von O entfernt, dass sie nicht kausal zu O geführt haben können.

$$ds_{OE} = ds'_{OE} = -\sqrt{<0}$$

Wenn wir uns in einem Inertialsystem betrachten (Erde annähernd) und den momentanen Aufenthaltsort zur momentanen Zeit als Ursprung O betrachten, dann ist damit die Menge aller Ereignisse E gemeint, von denen wir jetzt noch nichts wissen, die uns aber einmal erreichen können. Bsp.: Wenn vor 10 Minuten in 4 Lichtjahren Entfernung eine Supernovaexplosion stattgefunden hat, dann können wir jetzt noch nichts davon wissen, sondern erst in 4 Jahren.

Abbildung 1.41 zeigt die Anordnung der drei verschiedenen Ereignispaar-Klassifizierungen und ihre Lage zum Lichtkegel.

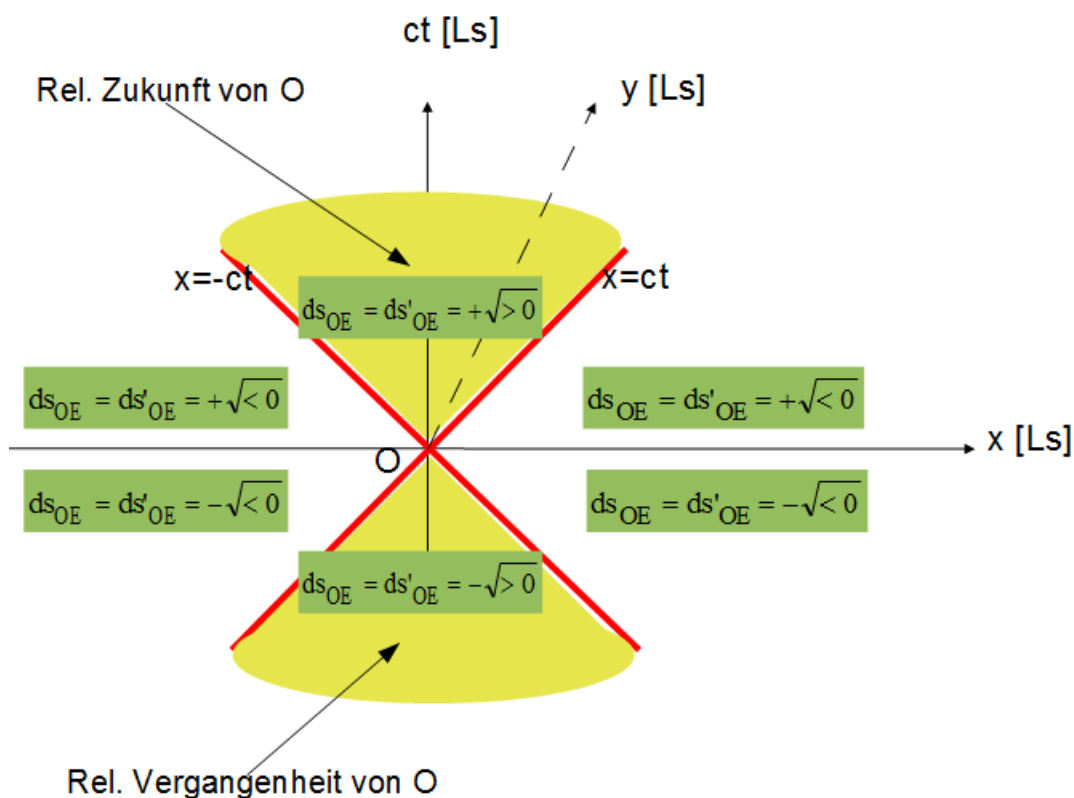


Abbildung 1.41: Verschiedene Ereignispaare OE und ihre Relation zum Lichtkegel

Dieses Konzept muss auf beliebige Punktereignisse A , B in einem Inertialsystem erweitert werden. Jedes Ereignis A bildet quasi einen eigenen Lichtkegel, der über die raumzeitlichen Kausalitätsbeziehungen zu anderen Ereignissen B entscheidet. Dies geschieht durch die Größe $\Delta_{S_{AB}}$, welche die Ereignispaare in lichtartige, zeitartige und raumartige Ereignispaare einteilt (s. Abb. 1.42).

Die in der Relativitätstheorie immer wieder benutzte Floskel Beobachtung beschreibt

die Tatsache, dass an einem bestimmten Ort mit den Koordinaten $(x; y; z)$ ein Ereignis zum Zeitpunkt t eintritt. **Es ist nicht damit gemeint**, dass eine Person am Ort $(0; 0; 0)$ auf seine Uhr schaut, die Zeit t abliest und dabei das Ereignis gerade feststellt. Letzteres entspricht einer visuellen Beobachtung: das Auge oder der Fotoapparat registriert die Lichtstrahlen, die von den Ereignissen oder Objekten ausgehen und gleichzeitig eintreten. Das ist das Thema der Visualisierung relativistischer Vorgänge, das aber nicht gemeint ist, wenn in der Relativitätstheorie von Beobachtungen und Beobachter gesprochen wird. Letztendlich wird mit dem Begriff Beobachtung bei der Relativitätstheorie ein Messvorgang beschrieben. Der Begriff Beobachter wird dann nicht ganz schlüssig gleichgesetzt mit Bezugssystem oder Inertialsystem. Man spricht dabei auch von einem Inertialbeobachter.

Da die Lichtgeschwindigkeit eine Grenzgeschwindigkeit ist, kann man konstatieren, dass alle Ereignisse, die zukünftig erreichbar oder irgendwie physikalisch beeinflussbar sind, in dem oberen Dreieck zwischen den Weltlinien des Lichtes liegen, und alle Ereignisse, von denen wir Kenntnis oder Wirkung erlangen, liegen in dem unteren Dreieck. Für die Weltlinien des Lichtes haben sich die Ausdrücke „Vorwärts- und Rückwärtslichtkegel“ etabliert. Allein in der x - t Ebene handelt es sich jedoch um 2 Dreiecke die von den Linien $x=ct$ und $x=-ct$ gebildet werden. Wird jedoch das Diagramm um die 2. Koordinate y erweitert. In diesem Fall bilden die Weltlinien die vom Ursprung ausgehen den „Vorwärtslichtkegel“. Die Bedeutung der Lichtkegel soll nun an 2 Ereignissen A und B (Abbildung 1.42) genauer betrachtet werden. Beide Ereignisse A und B stellen für sich gesehen die Gegenwart dar. Die Zukunft von A liegt innerhalb des Vorwärtslichtkegels von A. In ihm befinden sich alle Ereignisse deren Ursache im Ereignis A liegen können. Dies kann z.B. die Bewegung eines Objektes, das zum Zeitpunkt von A in A war, an einen Raum-Zeit „Ort“ innerhalb des Vorwärtslichtkegels sein. Ein Objekt das in A war, kann niemals zwischen seinen Vorwärts- und Rückwärtskegel gelangen, noch kann es von Ereignissen zwischen den Lichtkegeln beeinflusst werden. Im Rückwärtslichtkegel von A liegen all jene Ereignisse, die zum Ereignis A geführt haben können. Er beinhaltet auch alle möglichen Aufenthaltsorte eines Objektes, das schließlich zu A gelangen kann, weil innerhalb des Lichtkegels nur Bewegungen mit Geschwindigkeit kleiner c beschrieben werden. Die gleichen Betrachtungen gelten für das Ereignis B. Die gemeinsame Zukunft von A und B ist die Menge aller Ereignisse die zum Vorwärtslichtkegel von A und zugleich zum Vorwärtslichtkegel von B gehören. Die gemeinsame Zukunft von A und B

enthält z.B. all jene Raum-Zeit Orte, an denen sich die Objekte die in A und B waren, treffen können.

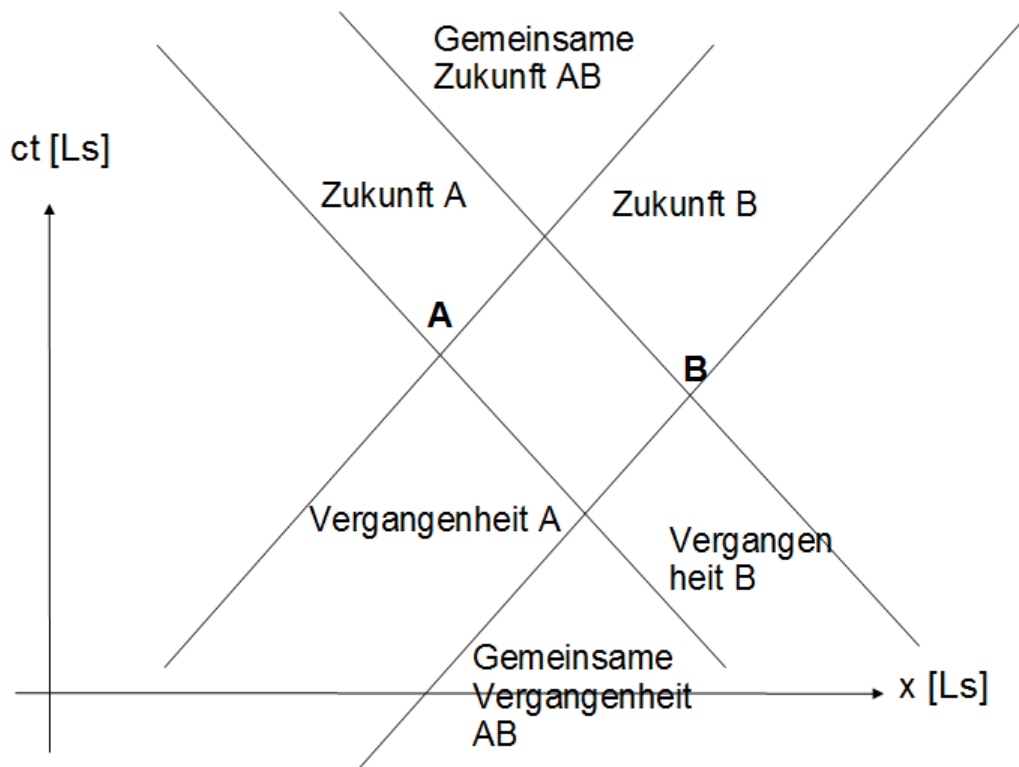


Abbildung 1.42: Verschiedene Ereignispaare AE und ihre Relation zum Lichtkegel

In unseren bisherigen Betrachtungen haben wir die Beziehung von Ereignispaaren stillschweigend immer nur aus einem Inertialsystem S betrachtet.

Die SRT berechnet aber gerade die Physik, welche sich zwischen verschieden, gleichförmig bewegten Inertialsystemen stattfindet. Wir wollen nun unser Modell erweitern und fragen uns, wie wir ein weiteres Inertialsystem, sagen wir S' in unser Koordinatensystem einbeziehen können. Wir gehen von der Standardkonfiguration der beiden Inertialsysteme S und S' aus, bei denen die beiden zu Beginn übereinander liegen und sich dann, aus der von uns gewählten gleichberechtigten Sicht, S' mit v in x -Richtung in Bezug auf S entfernt.

Die Abbildung 1.43 zeigt einen derartigen Bewegungsvorgang schematisch.

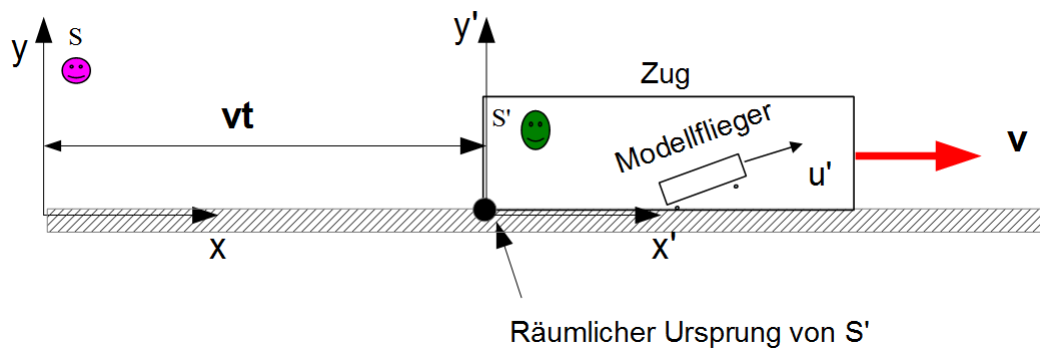


Abbildung 1.43: Gedankenexperiment zur Darstellung von Minkowski-Diagrammen für zwei relativ zueinander bewegte Inertialsysteme (S und S') - 1

Wir wissen bereits, dass wir die Koordinaten physikalischer Punktereignisse und deren Differenzen mit der LT ineinander umrechnen können. Wie bewegt sich der Ursprung von S' relativ zu S im ct-x-Diagramm von S? Dazu sehen wir uns Abbildung 1.44 an.

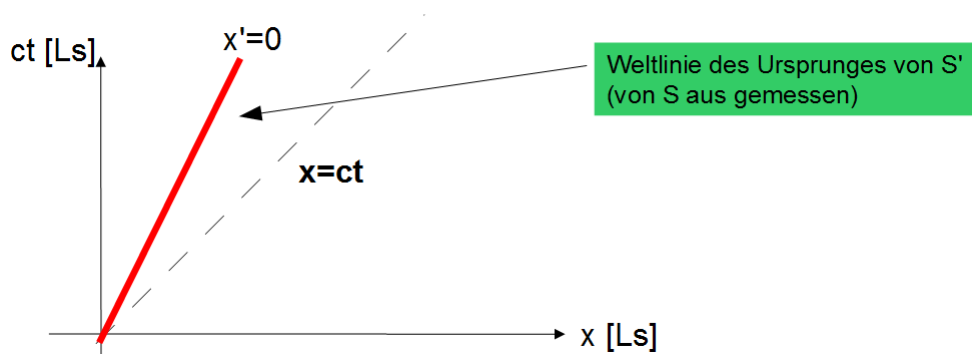


Abbildung 1.44: Gedankenexperiment zur Darstellung von Minkowski-Diagrammen für zwei relativ zueinander bewegte Inertialsysteme (S und S') von S aus betrachtet - 2

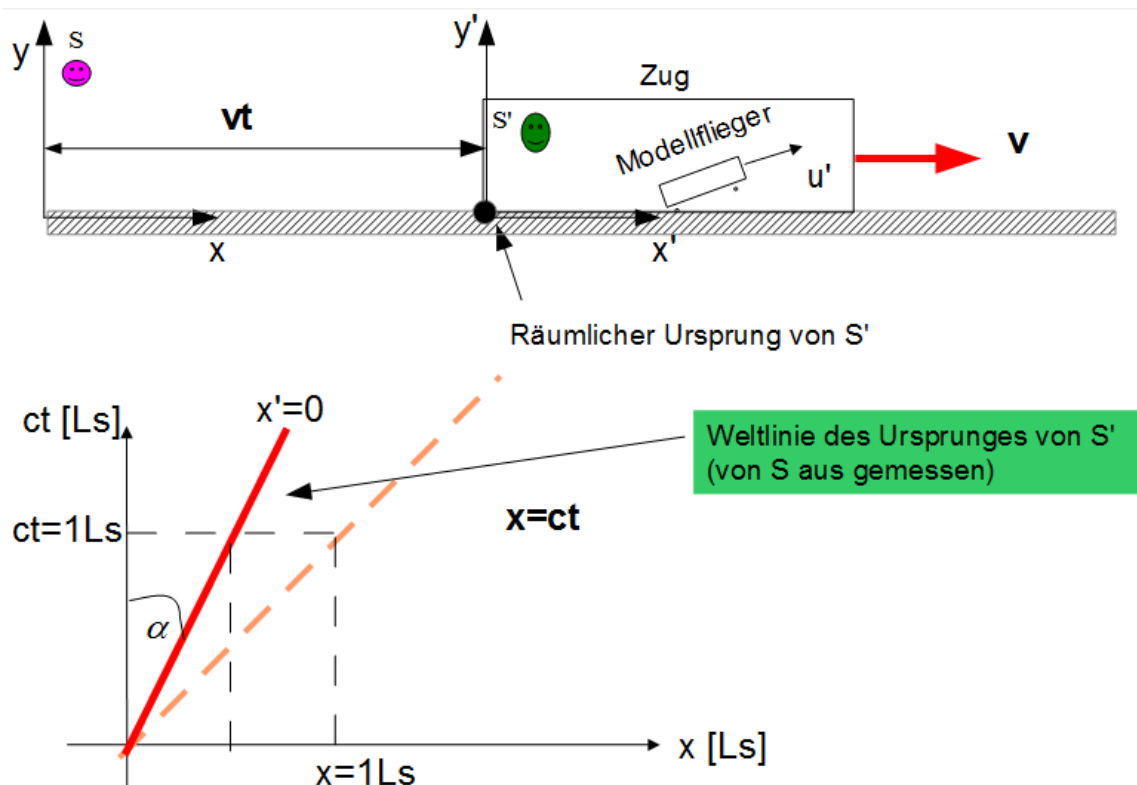


Abbildung 1.45: Gedankenexperiment zur Darstellung von Minkowski-Diagrammen für zwei relativ zueinander bewegte Inertialsysteme (S und S') von S aus betrachtet - 3

Für den Ursprung von S', d.h. für alle materiellen bewegten Körper, gilt generell für den Winkel α zwischen ihrer Weltlinie und der ct-Achse (vgl. mit (1.134)):

$$\tan \alpha = \frac{\Delta x}{c \Delta t} = \frac{\Delta x}{c \frac{\Delta x}{v}} = \frac{v}{c} < 1 \quad \Rightarrow \alpha < 45^\circ \quad (1.135)$$

Überlegen wir uns, welche Bedeutung die Koordinatenachsen im Minkowski-Diagramm haben.

In S ist die ct-Achse, der Ort aller Ereignisse am räumlichen Ursprung von S zu allen Zeiten t. In S besteht die x-Achse aus den Orten aller Ereignisse, die in S gleichzeitig zum Ereignis O (t=0) sind.

Von S aus betrachtet muss die ct'-Achse (x'=0) der Ort aller Ereignisse am räumlichen Ursprung von S' zu allen Zeiten t' sein. Das ist dann aber von S aus gesehen, genau die eingezeichnete Weltlinie des Ursprunges, der in S aufgrund der Relativbewegung, die Gleichung $x=vt$ hat.

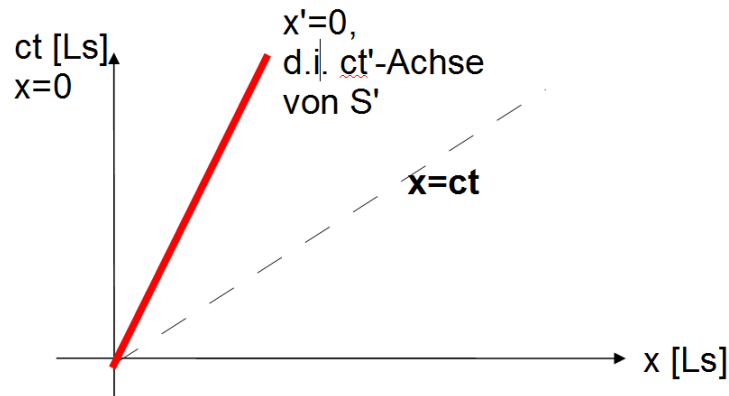


Abbildung 1.46: Gedankenexperiment zur Darstellung von Minkowski-Diagrammen für zwei relativ zueinander bewegte Inertialsysteme (S und S') von S aus betrachtet - 4

Welches ist aber nun die x' -Achse von S' im Minkowski-Diagramm von S ? Die x' -Achse besteht aus den Orten aller Ereignisse, die in S' gleichzeitig zu O sind ($t'=0$). Wir konstruieren nun die x' -Achse anhand folgender Überlegung (s. Abbildung 1.47): Wir gehen von unserer Standardkonfiguration aus, bei der sich S' in Bezug auf S mit v in x -Richtung entfernt. Die ct' -Achse lässt sich leicht einzeichnen, da $\tan a = v/c$ ist.

Im Ereignis B , also zur Zeit t_b , treffen am Ursprung von S' gleichzeitig 2 Lichtblitze aus genau entgegengesetzten Richtungen ein.

Die beiden Lichtquellen seien zur Zeit $t=t'=0$ gleich weit von S und S' entfernt. Da c in allen Inertialsystemen gleich ist, müssen die Lichtblitze für den Beobachter in S' gleichzeitig zu O losgeschickt worden sein. Dies ist Ausdruck des Relativitätsprinzips wonach er selbst nicht feststellen kann ob er sich gleichförmig bewegt oder ruht. Da sich S' in Richtung der Blitzlampe bei C bewegt, muss für S die Blitzlampe in A bereits vor dem Start von S' zur Zeit t_A aktiviert worden sein und die Blitzlampe C später zur Zeit t_C . Da sich S' gleichförmig bewegt, sind die Beträge $t_A=t_C$. Die roten gestrichelten Linien stellen im Minkowski Diagramm (s. Abb. 1.47) die Lichtstrahlen der Blitzlampen dar, die im 45° Winkel in allen Inertialsystemen verlaufen.

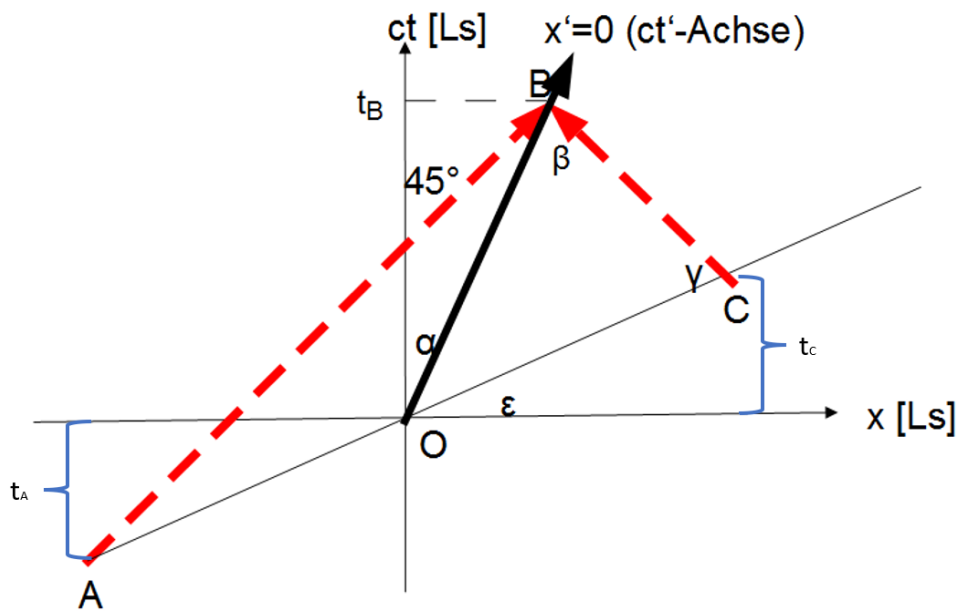


Abbildung 1.47: Gedankenexperiment zur Darstellung von Minkowski-Diagrammen für zwei relativ zueinander bewegte Inertialsysteme (S und S') von S aus betrachtet – 5

Zunächst einmal ist klar, dass die x-Achsenabschnitte der Position von A und C gleich groß aus der Sicht von S sein müssen $x_A = x_C$, da sie gleich weit entfernt sind.

Zeichnet man von B aus jeweils die Lichtsignale in die beiden entgegengesetzten Richtungen ein aus der sie gekommen sind, dann ergeben sich die beiden Schnittpunkte für A und C im Minkowski Diagramm. Die beiden Lichtsignale stehen im Minkowski Diagramm senkrecht aufeinander.

Da A und C für S' gleichzeitig zu $t'=0$ und damit O sind, muss die Verbindungslinie AC ein Teil der x' – Achse von S' sein.

Wie lässt sie sich im Minkowski Diagramm also generell die x' -Achse einzeichnen?

Wie groß ist z.B. der Winkel ϵ ?

Die Antwort liefern die folgenden geometrischen Zusammenhänge im Minkowski Diagramm:

Da die Beträge $x_A = x_C$ und $t_A = t_C$ gilt, muss die Länge der Strecke OA gleich OC sein, $OA = OC$. Mathematisch gesehen bilden die drei Punkt ereignisse ACB ein rechtwinkliges Dreieck im Minkowski Diagramm. Mathematisch kann hier der Satz von Thales angewendet werden: Der Mittelpunkt des Umkreises eines rechtwinkligen Dreiecks liegt immer in der Mitte der Hypotenuse, also der längsten Seite des Dreiecks die

dem rechten Winkel gegenüberliegt.

Dies bedeutet dann dass die Längen der folgenden Strecken gleich sind, da sie den Radius des Thaleskreises bilden: $OA=OC=OB$

Da im speziellen $OB=OC$, bilden OCB ein gleichschenkliges Dreieck, sodass $\beta=\gamma$.

Einfache Winkelsummenrechnungen, die hier nicht explizit aufgeführt werden, liefern dann das Ergebnis, dass $\alpha = \varepsilon$, wobei bekannt ist, dass $\tan \alpha = v/c$.

Da $\varepsilon=\alpha$, erhält man die x' -Achse also aus der ct' -Achse ($x=vt$) durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden, die ein Lichtstrahl darstellt. Weiß man also die Geschwindigkeit v von S' in Bezug auf S , also v/c , dann kann man die Achsen des Inertialsystems S' (bezüglich S) vollständig einzeichnen (Abbildung 1.48):

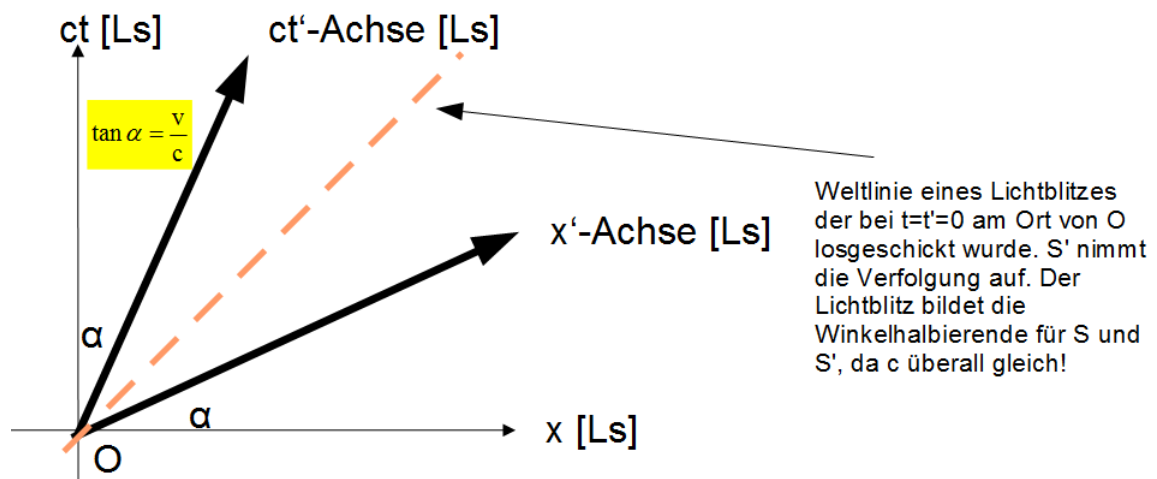


Abbildung 1.48: Darstellung des Inertialsystems S' bezüglich S

Wichtig: Da jedes Inertialsystem aufgrund des experimentell bestätigten Relativitätsprinzips, als ruhend angenommen werden kann, gilt auch von S' aus betrachtet folgendes Minkowski-Diagramm.

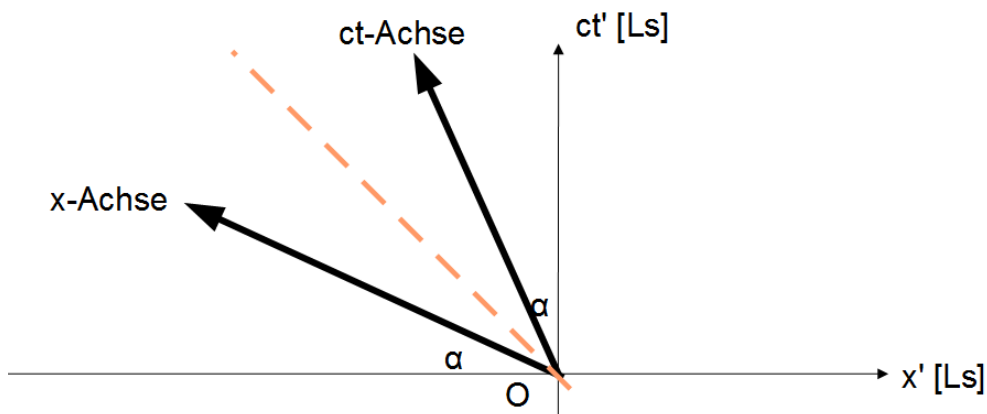


Abbildung 1.49: Darstellung des Inertialsystemes S bezüglich S'

Da jedes Inertialsystem gleichberechtigt ist, gibt es die Möglichkeit für unendlich viele verschiedene Inertialsysteme bezüglich S. Alle haben eine andere Relativgeschwindigkeit v zu S:

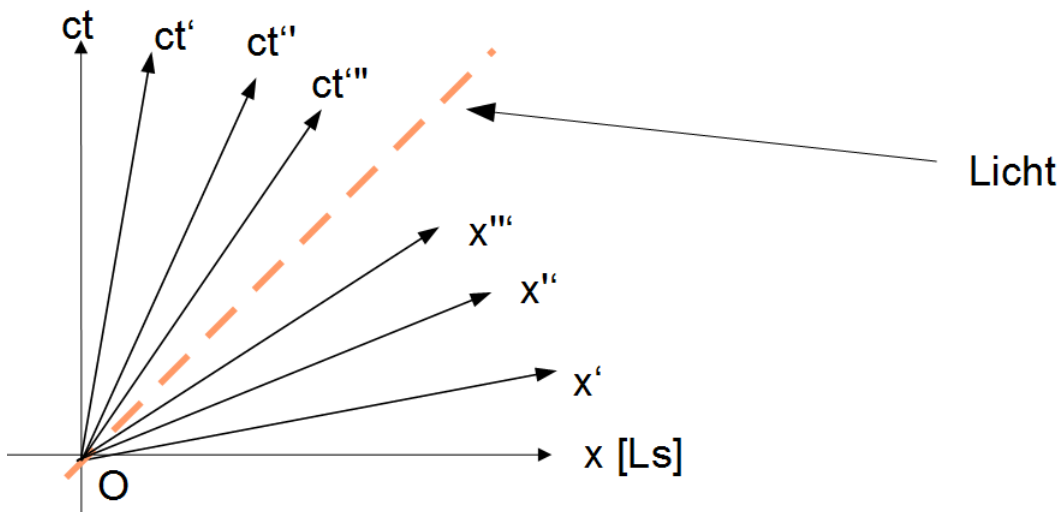


Abbildung 1.50: Darstellung verschiedener Inertialsysteme S' bezüglich S

Die Skalierung der Achsen von S' bezüglich S ergibt sich aus der Zeitdilatation und der Längenkontraktion.

Skalierung auf der Zeitachse t' berechnet sich für S zu:

Nach $t=1s$ in S, vergeht auf der Uhr in S' bei $x'=0$ aufgrund (1.76) die Zeit

$$t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = t \cdot \gamma_v^{-1} = 1s \cdot \gamma_v^{-1} \quad (1.136)$$

Das ist weniger Zeit als in S, abhängig von v.

Skalierung auf der Zeitachse t' berechnet sich für S zu:

Die Strecke $x=1Ls$ erscheint in S' verkürzt, mit (1.77)

$$x' = x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = x \cdot \gamma_v^{-1} = 1Ls \cdot \gamma_v^{-1} \quad (1.137)$$

Dies führt zu folgender Darstellung der Bewegung von S' bezüglich S, mit vollständiger Skalierung der Achsen.

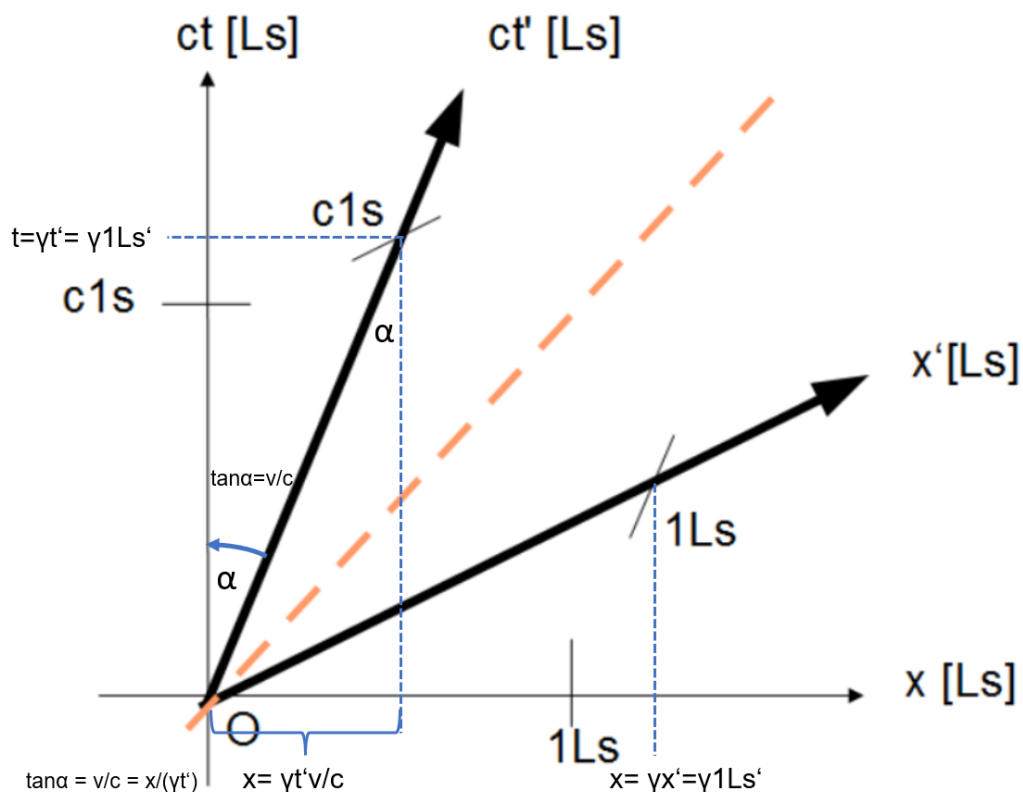


Abbildung 1.51: Darstellung der Bewegung des Inertialsystemes S' bezüglich S mit Skalierung der Achsen

Die Umrechnung der Koordinaten zwischen den Ereignissen, erfolgt mit der Lorentz-Transformation. Die Ereignisse können aber auch im Minkowski Diagramm konstruiert werden und die Koordinaten abgelesen werden.

Im folgenden Bild sind für verschiedene Ereignisse A,B,C,D welche in S' alle bei $ct'=1Ls$, aber unterschiedlichen Orten x' stattfinden, eingezeichnet. Die Koordinaten dieser Ereignisse in S' erhält man durch **Parallelverschiebung** der ct' - und x' - Achse! (Stichwort: Kontravariante Koordinaten)

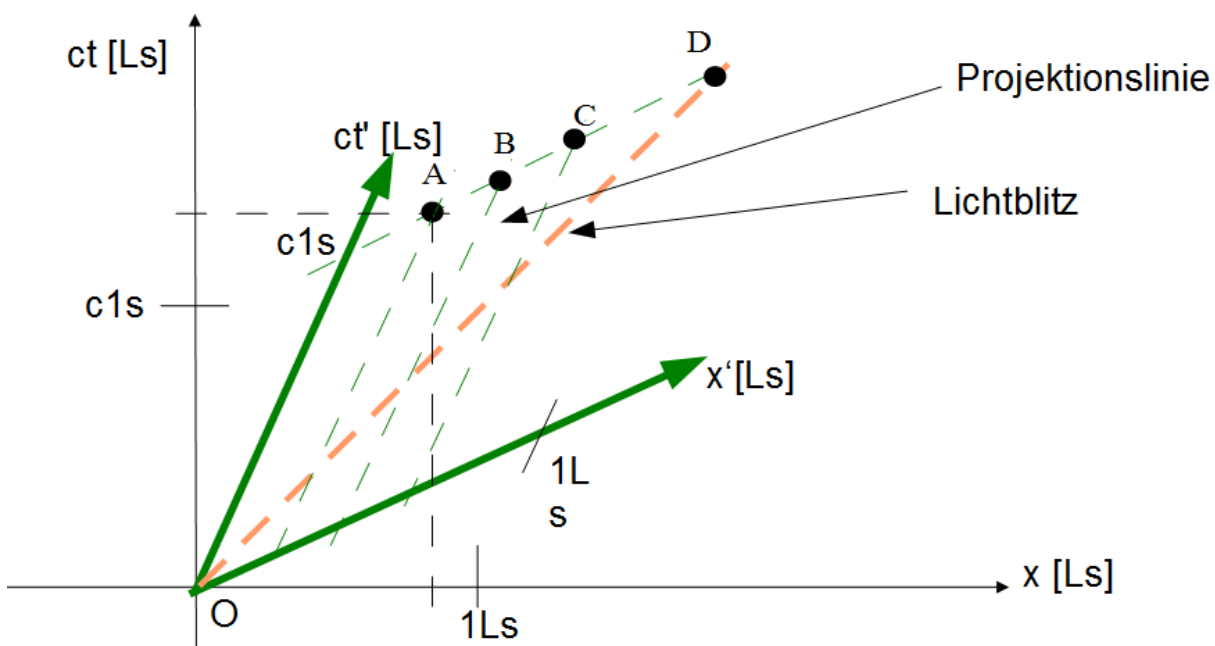


Abbildung 1.52: Darstellung verschiedener Ereignisse in S' bezüglich S

Das Ereignis A hat zum Beispiel folgende abgelesene Koordinaten:

$$\text{In } S': A(ct'_A = 1Ls, x'_A = 0,25Ls)$$

$$\text{In } S: A(ct_A = 1,32Ls, x_A = 0,9Ls)$$

Ereignis A soll dadurch zustande kommen, dass jemand bei $t=t'=0$ am Ursprung von S einen Ball in x-Richtung wirft, während sich S' an S vorbeibewegt (Standardkonfiguration). O und A bilden dann also ein Ereignispaar.

Man kann die Weltlinie des Balles einzeichnen und man kann zeigen, dass das Raum-Zeit-Intervall zwischen O und A für S und S' gleich ist.

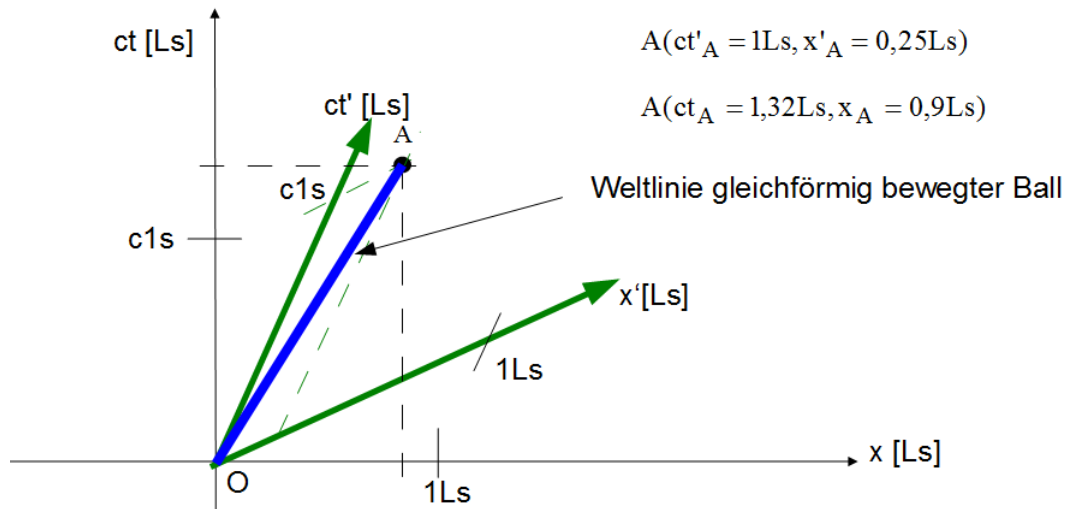


Abbildung 1.53: Weltlinie eines gleichförmig bewegten Balles mit resultierender Weltlinie (Ereignispaar OA)

Man kann leicht durch einsetzen der Koordinaten zeigen, dass für das Raum-Zeitintervall gilt:

$$ds_{OA}^2 = ds'_{OA}{}^2 = c^2 dt_{OA}^2 - dx_{OA}^2 = c^2 dt'_{OA}{}^2 - dx'_{OA}{}^2 = 0,94Ls^2 \quad (1.138)$$

Versucht man in Minkowski-Diagrammen die Länge von Strecken mit dem Satz des Pythagoras zu berechnen, oder einfach optisch die Länge zu vergleichen, so führt dies zu falschen Schlüssen. Es muss für die Beurteilung der „Länge“ des Raumzeit-Intervalles, mit den Koordinaten in der Weise (1.138) gerechnet werden.

Es sollen hier direkt ein paar Anmerkungen zur Geometrie in Minkowski-Diagrammen gemacht werden um Missverständnisse zu vermeiden:

Es handelt sich bei Minkowski-Diagrammen geometrisch gesehen um **schiefwinklige Koordinatensysteme mit verzerrten Achsen! Es gilt deshalb keine Euklidische Geometrie, d.h. :**

- kein Satz des Pythagoras zwischen Weltlinien möglich
- kein Kosinussatz zwischen Weltlinien möglich

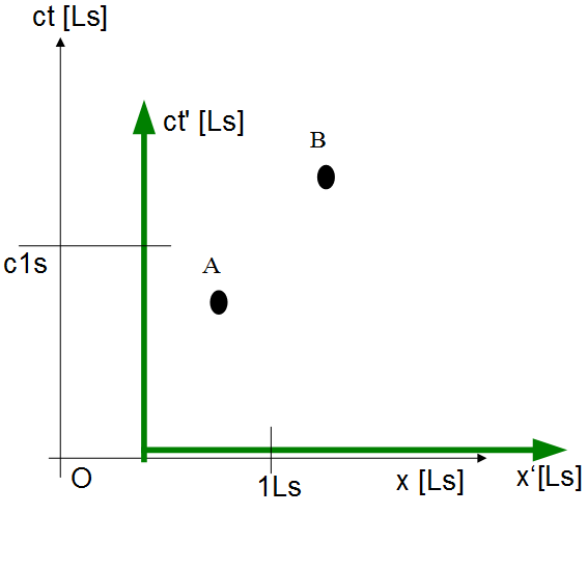
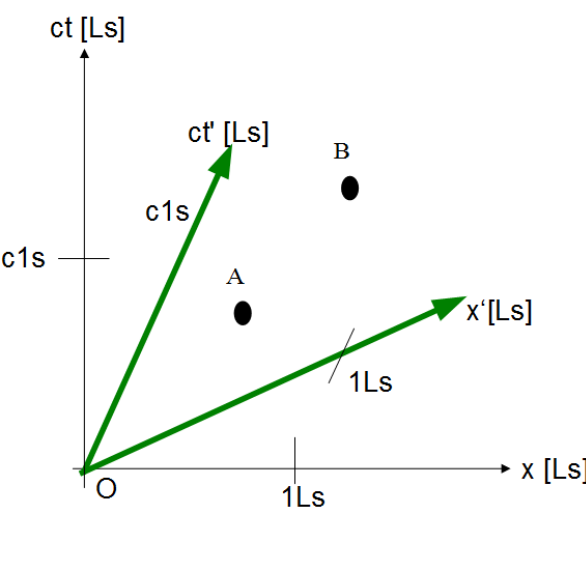
- kein euklidisches Skalarprodukt möglich

Minkowski hat erkannt, dass die Zeit bei Beschreibung von physikalischen Vorgängen in Inertialsystemen, zum Bestandteil von Koordinatensystemen wird, deren Skalen durch die Relativbewegung von Inertialsystemen gestaucht und gedehnt werden können. Dies hat weitreichende Konsequenzen für eine konsistente Formulierung der Physik anhand von Vektoren bzw. Tensoren.

Newtonscher Raum vs. Minkowski-Raum

Der physikalische Raum der Newtonschen Physik (klassische Mechanik) basiert auf dem dreidimensionalen euklidischen Raum. In diesem gilt der Satz des Pythagoras und Weegelemente können damit richtig berechnet werden. Diese Eigenschaft wird auf den Vektorraum übertragen, dem sich die Physik mit zahlreichen Größen, wie dem Kraft-Vektor, bedient.

Im Falle von physikalischen Vorgängen die sich nahezu mit Lichtgeschwindigkeit abspielen, muss jedoch die SRT angewendet werden. Die klassische Addition von Geschwindigkeitsvektoren funktioniert hier nicht mehr. Wir werden im Folgenden noch sehen, dass eine vollständig konsistente physikalische Theorie im Rahmen eines 4-dimensionalen Raumes funktioniert. In diesem gilt anstelle des Satzes des Pythagoras eine allgemeinere Form, die man auch als Minkowski Skalarprodukt bezeichnen kann. Die folgende Tabelle zeigt eine Übersicht über die wesentlichen Unterschiede des Euklidischen Raumes der Newtonschen Physik und des Minkowski-Raumes der SRT.

<p>Newtonsche Physik (Euklidischer Raum)</p>	<p>Einsteinsche SRT-Physik (Minkowski-Raum)</p>
	
<p>Der räumliche Abstand ist in allen Systemen gleich:</p>	<p>Das Raum-Zeit-Intervall zwischen 2 Punktereignissen ist in allen Inertialsystemen gleich:</p>
$ds_{AB}^2 = ds'_{AB}{}^2 = dx_{AB}^2 + dy_{AB}^2 + dz_{AB}^2 = dx'_{AB}{}^2 + dy'_{AB}{}^2 + dz'_{AB}{}^2$	$ds_{AB}^2 = ds'_{AB}{}^2 = c^2 dt_{AB}^2 - dx_{AB}^2 = c^2 dt'_{AB}{}^2 - dx'_{AB}{}^2$
<p>Der zeitliche Abstand ist in allen Systemen gleich:</p>	
$dt_{AB}^2 = dt'_{AB}{}^2$	

Eichhyperbeln

Wenn S ein Referenz-Inertialsystem ist und wenn man nun für verschiedene v/c , weitere Inertialsysteme dazu einzeichnet, dann erhält man anhand der Frage, wo sich die Einheit 1 auf den jeweiligen Raum- und Zeitachsen befindet, die sogenannten Eichhyperbeln, wenn man die entstehenden Punkte der Einheit 1 auf den jeweiligen Zeit- und Raumachsen verbindet. Dies Skalierung geschieht dabei wie in (1.136) und (1.137) hergeleitet.

Im folgenden Diagramm, sind exemplarisch verschiedene Inertialsysteme bezüglich des willkürlich gewählten Referenz-Inertialsystem S eingetragen. Bsp: $v/c=+1/6$ (S'), $+2/6$ (S''), $+3/6$ (S''').....(nicht maßstabsgetreu)

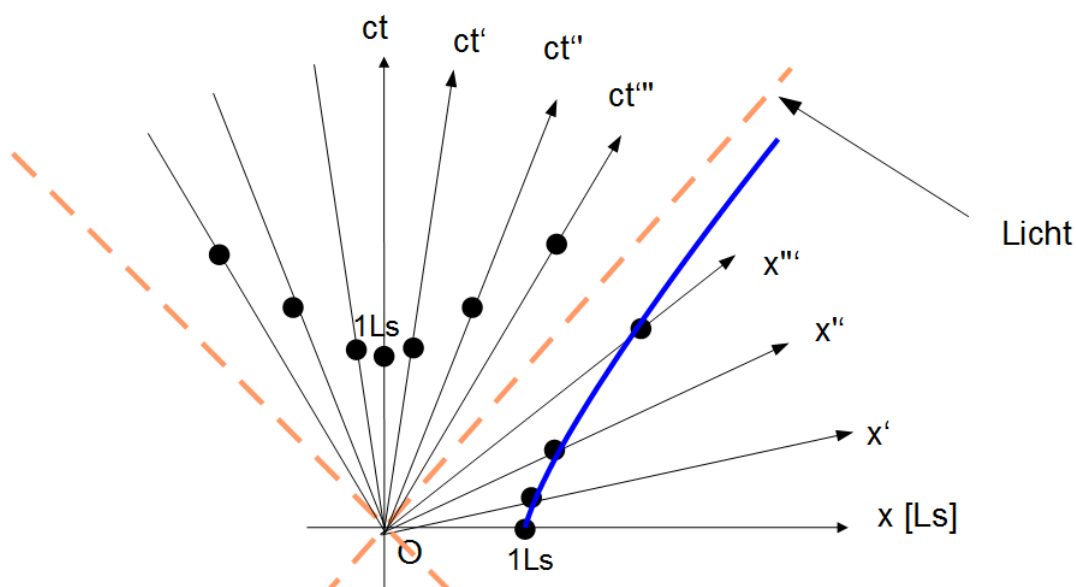


Abbildung 1.54: Beispiel zur Konstruktion von Eichhyperbeln

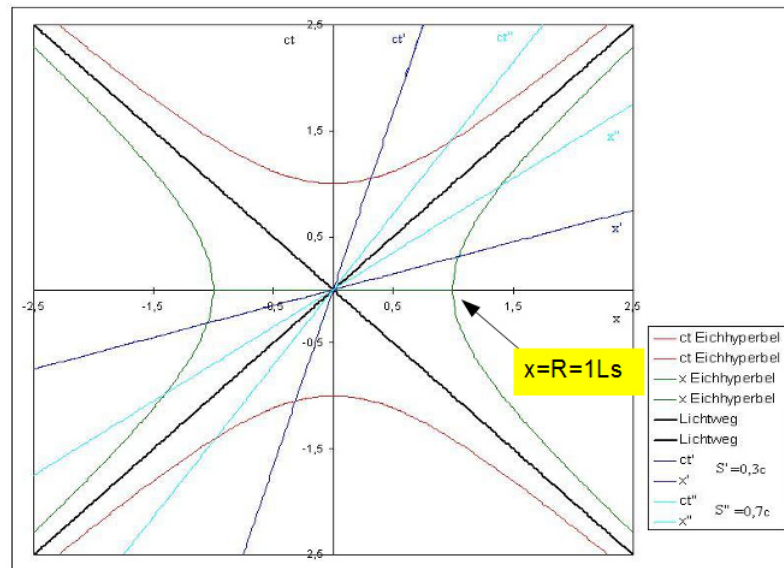


Abbildung 1.55: Beispiel zur Konstruktion von Eichhyperbeln

Die Eichhyperbeln haben also die mathematischen Funktionen:

$$ct = \pm \sqrt{x^2 - R^2} \quad (1.139)$$

1.20 Das invariante Eigenzeitintervall

Zwei Punktereignisse, die über eine gleichförmige Bewegung eines Körpers verbunden sind, bilden ein zeitartiges Ereignispaar.

Abbildung 1.56 zeigt ein Minkowski-Diagramm mit der Weltlinie zwischen dem zeitartigen Ereignispaar AB:

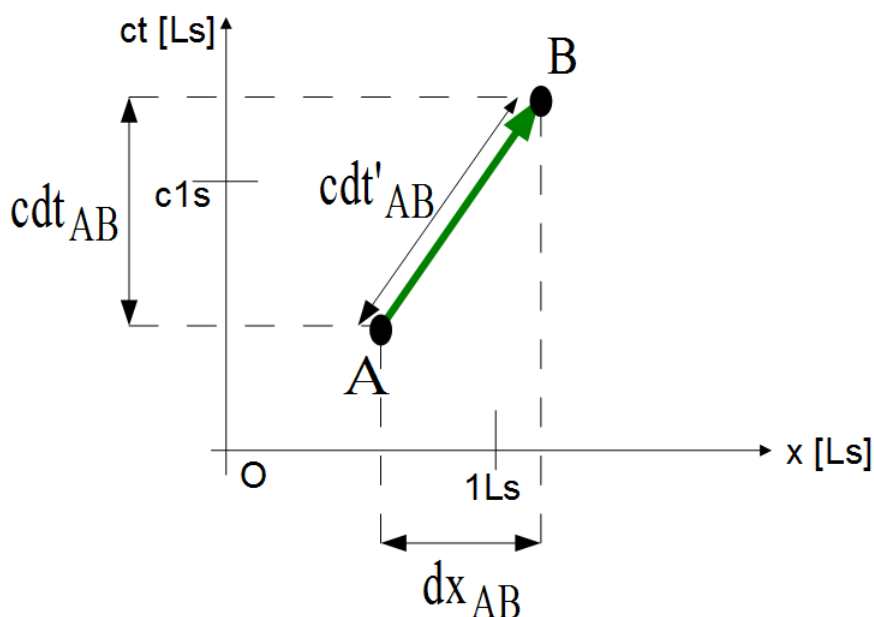


Abbildung 1.56: Zeitartiges Ereignispaar AB

Die Gerade zwischen den Ereignissen A und B stellt, z.B. die gleichförmige Bewegung eines materiellen Teilchens mit v in x -Richtung, aus der Sicht von S dar. Dieses Teilchen kann z.B. ein Teilchen im Ursprung von S' sein. Eine am Teilchen gedacht mitgeführte Uhr (gleicher Ort in S') stellt stets die Eigenzeit des Teilchens dar, da es sich bezüglich S' immer am gleichen Ort befindet ($\Delta x'=0$).

Für die Eigenzeit des Teilchens muss also gelten

$$d\tau_{AB} = dt'_{AB} \tag{1.140}$$

Dies ist ein eindrucksvolles Beispiel dafür, dass die Länge von Strecken im Minkowski-Diagramm nicht miteinander verglichen werden darf. Im Diagramm ist nämlich die Länge der Strecke cdt_{AB} deutlich kürzer als $cdt'_{AB}=cd\tau_{AB}$. Physikalisch ist das jedoch nicht korrekt, denn $d\tau_{AB}$ stellt stets die kürzeste Zeitdauer zwischen den Punktereignissen dar. In allen anderen relativ dazu bewegten Inertialsystemen vergeht zwischen A und B mehr Zeit.

Man kann dies auch mit den Formeln der Lorentz-Transformation nachrechnen. Da sich das Teilchen in S' nicht bewegt (S' ist das sogenannte Ruhesystem des Teilchens), setzt man in Formel (1.72 linke Spalte) $\Delta x'=0$ und erhält für S' , also eine mitgeführte Uhr am Teilchen selbst:

$$dt'_{AB} = \gamma_v^{-1} \cdot dt_{AB} = d\tau_{AB} \quad (1.141)$$

Das Eigenzeitintervall zwischen den Ereignissen A und B ist alleine völlig ausreichend, um das Raum-Zeit Intervall dieses Ereignispaars vollständig zu berechnen. Dies ist eines der interessantesten Ergebnisse und wir wollen es deshalb hier ableiten:

$$d\tau_{AB} = dt'_{AB} = \gamma_v^{-1} \cdot dt_{AB} = dt_{AB} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{dt_{AB}^2 - \frac{v^2 dt_{AB}^2}{c^2}} \quad (1.142)$$

Mit $dx_{AB}=vdt_{AB}$ folgt

$$d\tau_{AB} = \sqrt{dt_{AB}^2 - \frac{v^2 dt_{AB}^2}{c^2}} = \sqrt{dt_{AB}^2 - \frac{dx_{AB}^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{ds_{AB}^2}{c^2}} \quad (1.143)$$

Und damit

$$\boxed{\begin{aligned} d\tau_{AB}^2 &= \frac{ds_{AB}^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} ds_{AB}^2 \\ ds_{AB} &= cd\tau_{AB} \end{aligned}} \quad (1.144)$$

Da das Raum-Zeit Intervall und die Lichtgeschwindigkeit invariant unter einer Lorentz-Transformation sind, muss das Eigenzeitintervall aufgrund von (1.144) ebenfalls unabhängig vom Inertialsystem sein und damit genau wie ds , invariant unter der

Lorentz-Transformation. Betrachtet man ein Objekt, das sich zwischen A und B mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegt (z.B. Photon), dann folgt aus der LT für t' (für $\Delta x'=0$ und $v=c$), da $cd\tau_{AB} = dt'_{AB} : d\tau_{AB}=0$.

Für ein Photon ist das Eigenzeitintervall zwischen beliebigen Ereignispaaren auf seiner Weltlinie stets Null.

1.21 Beschleunigte Bewegung in der SRT - 1

Im Gegensatz zur Ausbreitung des Lichtes, dessen Weltlinie im Minkowski-Diagramm stets eine Gerade ist, die im 45° Winkel zur ct -Achse geneigt ist, kann die Bewegung massebehafteter Teilchen (Ruhemasse größer Null), unter dem Einfluss von Kräften auch beschleunigt verlaufen. Die Steigung der Weltlinie dieses Bewegungsvorganges, kann dann an verschiedenen Punkten der Bahn eine andere Steigung aufweisen. An keinem Punkt der Kurve darf der Winkel jedoch größer als 45° sein.

Auch beschleunigte Bewegungsvorgänge können mit der SRT behandelt werden. Hierzu verwendet man das Konzept des „momentanen Ruhesystemes“ (MR) des Teilchens. Dieses MR ist stets mit dem Teilchen fest verbunden, sodass das Teilchen im Ursprung dieses MR ruht.

Man kann sich vorstellen, dass ein Teilchen während des Beschleunigungsvorganges relativ zu einem Referenz-Inertialsystem S , in infinitesimalen Zeitabschnitten dt , verschiedene Inertialsysteme mit jeweils anderen Relativgeschwindigkeiten v durchläuft.

Eine Erklärung bietet sich bereits durch das Konzept der Eichhyperbeln an. In Bild 1.57 beschreibt die blaue Kurve, die Weltlinie eines Teilchens, das zur Zeit $t=t'=t'' \dots = 0$ am Ort $x=1L_s$ startet und sich beschleunigt in x -Richtung entfernt. Es „durchläuft“ dabei also die verschiedenen Inertialsysteme $S', S'', S''' \dots$, die für das Teilchen jeweils eigene MR für einen infinitesimalen Zeitabschnitt darstellen.

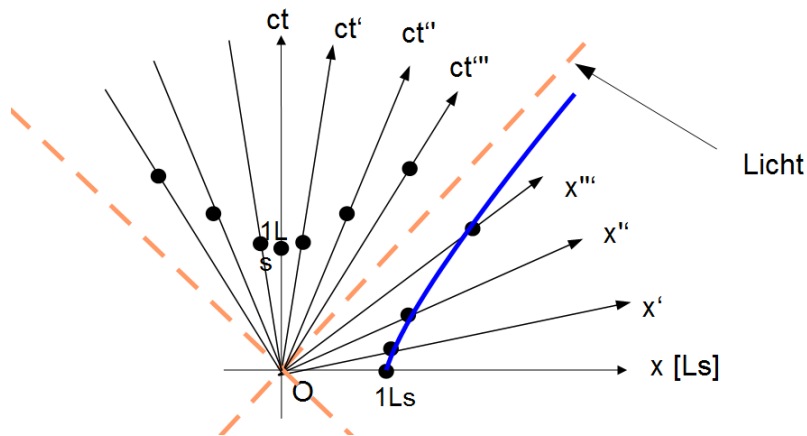


Abbildung 1.57: Beschleunigte Bewegung eines Teilchens

In Abbildung 1.58 ist eine beliebig beschleunigte Bewegung eines Teilchens zwischen den Punktereignissen A und B dargestellt. Die blau eingezeichnete Kurve ist also die Weltlinie des Teilchens.

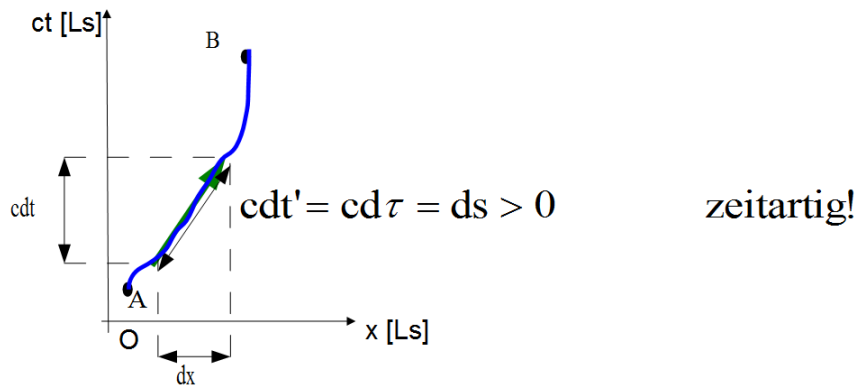


Abbildung 1.58: Beschleunigte Bewegung eines Teilchens

Wir können unsere bisherigen Berechnungsformeln weiterhin verwenden, wenn wir diese auf infinitesimale Abschnitte der Weltlinie – in denen die Steigung nahezu konstant ist – anwenden.

Zusätzlich müssen wir beachten, dass die Geschwindigkeit v nun keine konstante Größe mehr ist, sondern eine Funktion der Zeit: $v=v(t)$.

Auch der Lorentz Faktor wird deshalb zu einer zeitabhängigen Größe:

$$\gamma_v^{-1} = \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} = f(t) \neq \text{const.} \quad (1.145)$$

Für das Eigenzeitintervall des Teilchens zwischen A und B gelten nun (1.142) – (1.144) folgendermaßen

$$\tau_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt = \frac{1}{c} \int_A^B ds_{AB} \quad (1.146)$$

In Kapitel 1.22 werden wir uns im Detail mit der Beschreibung des Kraft- und Energiebegriffes in der SRT auseinandersetzen und im weiteren Verlauf die hier erarbeiteten Konzepte zur beschleunigten Bewegung anwenden und ergänzen.

Invariante Größen der Speziellen Relativitätstheorie – 1

Bei den bisherigen Ausführungen zur SRT haben wir verschiedene Größen entwickelt, die sich unter einer LT nicht verändern. Diesen Größen kommt eine besondere Bedeutung zu, da sie unabhängig vom Inertialsystem aus dem sie festgestellt werden, stets den gleichen Wert haben. Wir wollen diese deshalb kurz auflisten:

- Lichtgeschwindigkeit c
- Raum-Zeit Intervall $ds'=ds$
- Eigenzeitintervall $d\tau=ds/c$
- Anzahl der Wellenfronten die einen Raum-Zeit Punkt erreicht (Kapitel 1.18)

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir uns ansehen, wie man den Doppler-Effekt mit Hilfe eines Minkowski-Diagrammes herleiten kann. Wir betrachten dazu Abbildung 1.59.

Ein Empfänger in S' entferne sich von einem Sender in S in x -Richtung mit Relativgeschwindigkeit v . S sende einen Lichtblitz zur Zeit $t=T_S$ los. In S' wird der Lichtblitz zur Zeit $t'=T_E$ an Ort $x'=0$ empfangen.

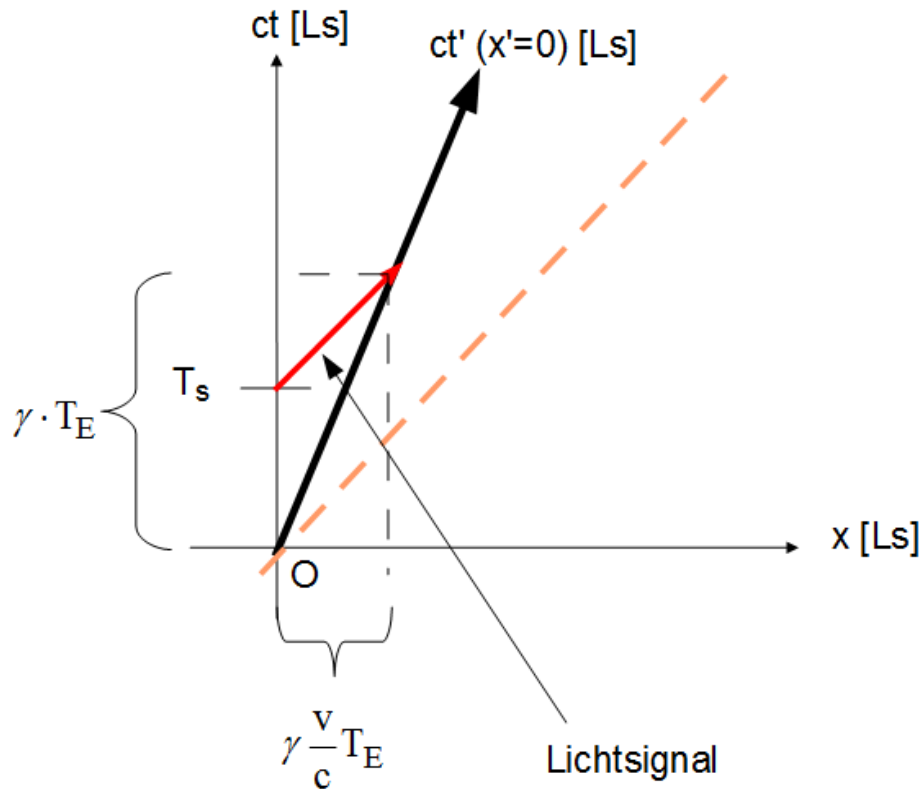


Abbildung 1.59: Doppler-Effekt im Minkowski-Diagramm

Das bedeutet also, wenn in S Lichtblitze im zeitlichen Abstand $\Delta t=T_S$ ausgesendet werden, dann werden diese in dem sich entfernenden System S' , mit größerem zeitlichen Abstand $\Delta t'=T_E$ empfangen.

Man erhält aus dem Minkowski-Diagramm (Abb. 1.59) und Vergleich mit dem Minkowski Diagramm in Abb. 1.51 folgenden Zusammenhang für das Sendeintervall T_S

$$T_S = \gamma T_E - \gamma \frac{v}{c} T_E$$

(1.147)(1.148)

Der Doppler-Faktor der Quelle (Sender) relativ zum Empfänger ist deshalb

$$D := \frac{T_E}{T_s} = \frac{T_E}{\gamma_v T_E - \frac{\gamma_v T_E v}{c}} = \frac{1}{\gamma_v \left(1 - \frac{v}{c}\right)} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c}} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = \frac{\Delta t_E}{\Delta t_s} = \frac{f_s}{f_E} \quad (1.149)$$

Dies ist das gleiche Ergebnis wie in Kapitel 1.18, Formel (1.123). Dort haben wir den longitudinalen Doppler-Effekt aus Überlegungen zur Zeitdilatation gewonnen.

1.22 Relativistische Dynamik

Wir kommen nun zu einem der spannendsten Gebiete der Speziellen Relativitätstheorie. Die überraschenden Effekte, die wir in den vorhergehenden Kapiteln zur Kinematik der SRT bereits detailliert untersucht haben (z.B. Längenkontraktion und Zeitdilatation), müssen unweigerlich mit den dynamischen Größen, u.a. dem Impuls eines Körpers korrelieren und zu weiteren Modifikationen der Newtonschen Physik führen.

Wir werden nun zeigen, dass das 2. Newtonsche Gesetz ($F=ma$) zwar unter der Galilei-Transformation invariant ist, nicht aber unter der Lorentz-Transformation, die bei sehr hohen Geschwindigkeiten angewendet werden muss.

Nach den Gesetzen der Newtonschen Mechanik könnte ein Körper, als Resultat einer ausreichend langen Beschleunigung, jede Geschwindigkeit u erreichen, auch $u>c$. Dies ist ebenfalls ein Widerspruch zu den Messergebnissen. Nach aller Überzeugung ist die Lorentz-Transformation korrekt, also ist es notwendig, dass das 2. Newtonsche Gesetz „relativistisch korrigiert“ wird.

In Kapitel 1.2, mit Formel (1.18), haben wir gesehen, dass das 2. Newtonsche Gesetz invariant unter der Galilei-Transformation ist

$$F' = ma' = m \frac{d^2 x'}{dt^2} = m \frac{d^2 (x - vt)}{dt^2} = m \frac{d^2 x}{dt^2} = ma = F \tag{1.150}$$

Bild 1.60 zeigt schematisch das zugrunde liegende Gedankenexperiment. Auf den Gegenstand (am Punkt P) wirke in S' die Kraft F'_x . Der Körper haben die Geschwindigkeit u' .

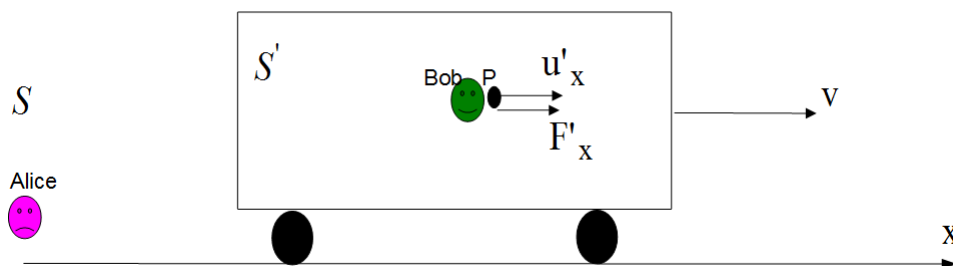


Abbildung 1.60: Gedankenexperiment zur Ableitung des Relativitätsprinzips

Da die (träge) Masse m des Körpers in diesem Fall ebenfalls eine invariante Größe ist gilt für die Änderung seiner Geschwindigkeit u : $du' = du$

$$a'_x = a_x, \quad \rightarrow \quad du'_x = du_x \quad (1.151)$$

1.22.1 Die relativistische Massenzunahme

Gemäß Newtonscher Physik ist die konstante träge Masse m eines Teilchens (Körpers), ein Maß für den Widerstand, den es seiner Beschleunigung entgegensetzt. Das relativistische Additionstheorem der Geschwindigkeiten zeigt uns jedoch, dass diese Voraussetzung nicht richtig, oder zumindest unvollständig sein muss, wenn sich das Teilchen mit einer sehr hohen Geschwindigkeit bewegt. Die Lorentz-Transformation fordert das relativistische Additionstheorem der Geschwindigkeiten (1.101) und (1.102). Für S' lautet es

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}$$

Zur Bestimmung der Geschwindigkeitsänderung wenden wir die allgemeingültige Berechnung des Differentials an

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial u'_x} du'_x = \frac{\left(1 + \frac{vu'_x}{c}\right) - (u'_x + v) \frac{v}{c^2}}{\left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)^2} du'_x \quad (1.152)$$

Dies steht in völligem Gegensatz zu (1.151) und bedeutet bei invarianter (und konstanter) träger Masse m

$$du_x \neq du'_x \quad \rightarrow \quad ma \neq ma'$$

Für die damaligen Physiker war das natürlich ein Schock, bedeutet es doch, dass die gesamte Newtonsche Physik nicht mit dem Relativitätsprinzip der SRT vereinbar ist. Das Trägheitsgesetz soll nun so erweitert werden, dass es im Fall kleiner Geschwindigkeiten $u \ll c$ in die bekannte Form übergeht. Wenn kein Massenverlust aufgrund des Rückstoßprinzips auftritt (Rakete), sollte für eine Teilchengeschwindigkeit (materieller Körper) $u \ll c$ gelten (siehe (1.8)):

$$\vec{F} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \frac{\partial(m \cdot \vec{u})}{\partial t} = m \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = m \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2}$$

Wir werden jedoch nun den allgemeingültigen Ansatz wählen, den wir bereits mit (1.9) anhand der Differentialrechnung erhalten haben, wenn wir davon ausgehen, dass die träge Masse m eine Funktion der Geschwindigkeit ist: $m=f(u(t))$:

$$\vec{F} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \frac{\partial(m \cdot \vec{u})}{\partial t} = \frac{\partial m}{\partial u} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + m \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \quad (1.153)$$

Die Vorstellung, dass die träge Masse von der Geschwindigkeit abhängen soll, scheint natürlich zunächst absolute Fiktion zu sein. Aber, wenn es so ist, dass es beobachtbare Phänomene gibt, für die du' nicht gleich du innerhalb von Inertialsystemen ist, dann würde das unter der Voraussetzung, dass die Masse unveränderlich ist, bedeuten, dass die Impulserhaltung gebrochen wäre. Der Impulserhaltungssatz (1.14) zählt jedoch zu den am besten bestätigten Prinzipien der Natur.

Jede akzeptable physikalische Beschreibung der Physik muss berücksichtigen, dass der Impuls in geschlossenen Systemen (ohne Einfluss äußerer Kräfte) erhalten bleibt. Das Neutrino wurde 1931 von W. Pauli als Teilchen mit 0-Ladung, das fehlende Energie und Drehimpuls (Spin) besitzen musste, was beim Beta-Zerfall nicht erklärt werden konnte. 10 Jahre später wurde es entdeckt. Dies zeigte ebenfalls, dass Impulserhaltung und Energieerhaltung tatsächlich fundamental sind.

Zunächst wollen wir konkret sehen, dass die klassische Impulserhaltung zusammen mit der relativistischen Geschwindigkeitsaddition zu Problemen führt.

Dies gelingt am besten mit der physikalischen Untersuchung eines völlig unelastischen Stoßes (Abbildung 1.61). Wir betrachten dazu wieder unser „Zug-Bahnsteig“

Experiment mit Alice in S und Bob in S' . Alice in S , lässt eine blaue Kugel mit Geschwindigkeit u auf eine ruhende Kugel (grün) rollen.

Vor dem Experiment zur Zeit t_0 wiegen Bob und Alice also die ruhenden Kugeln mit einer Waage und stellen fest, dass im ruhenden Zustand beide Massen exakt gleich schwer sind $m_1(t_0)=m_2(t_0)=m(t_0)$.

Die beiden Massen kollidieren zum Zeitpunkt t_2 zentral und vollkommen inelastisch. Nach dem Stoß bilden die beiden Kugeln einen Klumpen der Masse M .

Aus Alice's Sicht (System S) bewegt sich die blaue Kugel (links) mit Geschwindigkeit u . Die zweite Kugel ruht hingegen für S . Nach dem Stoß bewegt sich der Klumpen M mit der Geschwindigkeit u_g für S .

Bob bewegt sich mit seinem Inertialsystem S'_{SP} zu allen Zeiten so, dass er sich im Schwerpunkt SP des Stoßvorganges befindet. Der Schwerpunkt SP ruht also relativ zu seinem Inertialsystem S'_{SP} .

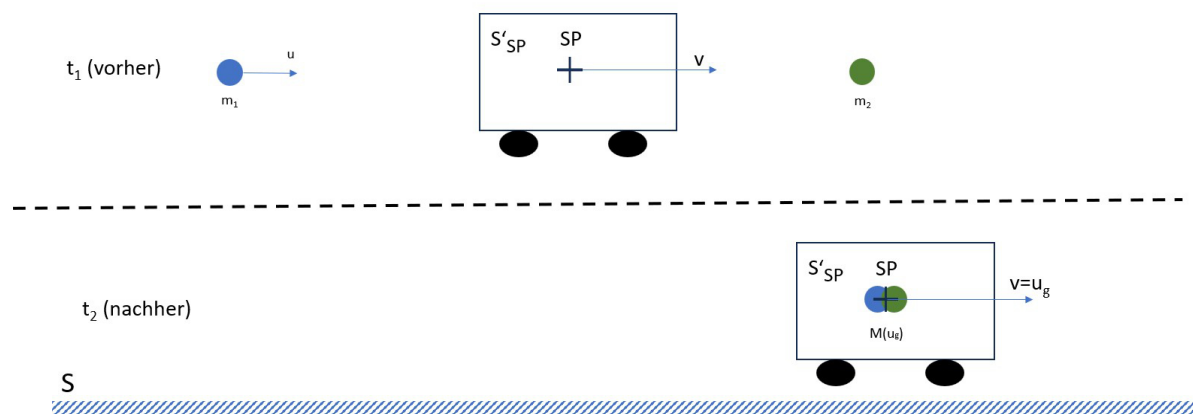


Abbildung 1.61: Gedankenexperiment zur Herleitung der relativistischen Masse

Das Schwerpunktsystem ist ein vorzügliches System um den Stoßvorgang zu beschreiben. Aus der klassischen Physik vor Einstein war bereits bekannt dass folgende Zusammenhänge gelten:

- Im Schwerpunktsystem S'_{SP} ist der Gesamtimpuls der beteiligten Massen vor und nach dem Stoß exakt gleich 0, da nur innere Kräfte wirken: $\Sigma p'_i=0$.

- Der Schwerpunkt SP bewegt sich vor- und nach dem Zusammenstoß von S aus gemessen mit der exakt gleichen Geschwindigkeit v_{SP} .

Aus der ersten Eigenschaft folgt, dass sich für Bob (in S'_{SP}) die beiden Massen mit gleicher Geschwindigkeit u' aufeinanderzubewegen und dann in einem ruhenden Klumpen liegen bleiben.

Die zweite Eigenschaft bedeutet aber auch, dass nach dem Stoß gelten muss $v_{SP}=u_g$.

Da beide sich über ihre Relativgeschwindigkeit einig sind, da sie diese mit einer einfachen Messung erhalten, gilt $v_{SP}=v'_{SP}=u_g$.

Damit m_2 vor dem Stoß (die sich in S'_{SP} mit $-u'$ bewegt) in S ruhend ist, muss sich das System S also relativ zu S'_{SP} ebenfalls mit u' bewegen. Für S'_{SP} ist also $v_{SP}=u'$.

Und deshalb ist $v_{SP} = v'_{SP} = u_g = u'$

Mit dem klassischen Impulserhaltungssatz und der klassischen Annahme dass die Massen geschwindigkeitsunabhängig sind, ist es nun möglich, den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit des Klumpens nach dem Stoß und der Anfangsgeschwindigkeit u in S zu berechnen:

$$\begin{aligned} \sum p_i(t_1) &= \sum p_i(t_2) \\ mu + 0 &= 2mu_g \\ u &= 2u_g \end{aligned}$$

Aus der Kinematik der SRT ist unabhängig davon jedoch bereits bekannt, dass die relativistische Geschwindigkeitsaddition wie folgt für S'_{SP} gilt:

$$u = \frac{u' + v_{SP}}{1 + \frac{v_{SP}u'}{c^2}}$$

Da aber auch $v_{SP} = v'_{SP} = u_g = u'$ folgt allgemein:

$$u = \frac{2u_g}{1 + \frac{u_g^2}{c^2}}$$

Lösen wir dies nach u_g auf, so erhalten wir eine quadratische Gleichung:

$$\frac{u}{c^2} u_g^2 - 2u_g + u = 0$$

Diese wird mit der „Mitternachtsformel“ gelöst. Als physikalische Lösung kommt nur die Lösung mit dem „-“ Zeichen in Betracht:

$$u_g = \frac{c^2}{u} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right) \quad (1)$$

Hier sieht man bereits dass dies unvereinbar mit dem klassischen Impulserhaltungssatz ist, denn wenn u gegen c strebt, dann wäre $u_g = c = u$. Dies widerspricht dem Ergebnis des Impulserhaltungssatzes, denn dann wäre ja $\Sigma p_i(t_2) > \Sigma p_i(t_1)$. Der inelastische Stoß hätte also Impuls aus dem Nichts erzeugt.

Die klassische Physik stand mit diesem Ergebnis also vor dem Abgrund, das gesamte Gebäude der klassischen Mechanik drohte der Einsturz.

An diesem historischen Scheideweg brauchte es nun Klarsicht und eine Rückbesinnung darauf, dass Ergebnisse physikalischer Vorgänge nicht vom Inertialbeobachter abhängen dürfen. Die Berechnungen der Ergebnisse von Experimenten dürfen sich also nicht unterscheiden. Wenn die beiden Kugeln also kollidieren, dann muss z.B. die Berechnung des Schadens an den Kugeln zum gleichen Ergebnis führen, unabhängig davon ob S oder S' es berechnet und zwar unter Verwendung der relativistischen Geschwindigkeitsaddition. Der bewährte und durch Experimente bestätigte Ansatz um dieses Problem der theoretischen Physik zu lösen, besteht nun darin:

- Der Impulserhaltungssatz ist in einer Weise anzusetzen, bei dem es möglich wird, dass der Bewegungszustand von Objekten ihre Masse beeinflusst.
- Die Massenerhaltung ist ebenfalls so anzusetzen, dass der Bewegungszustand der Massen sie beeinflusst

Obwohl wir wissen, dass im ruhenden Zustand vor dem Experiment beide Kugelmassen gleich schwer sind, schreiben wir für den Impulserhaltungssatz

$$\begin{aligned} \sum p_i(t_1) &= \sum p_i(t_2) \\ m_1(t_1)u + 0 &= M(t_2)u_g \end{aligned} \tag{2}$$

Die Massenerhaltung liefert

$$\begin{aligned} \sum m_i(t_1) &= \sum m_i(t_2) \\ m_1(t_1) + m_2(t_1) &= M(t_2) \end{aligned} \tag{3}$$

Die ist äußerst geschickt, denn wenn wir diese formale Massenerhaltung (3) mit der Impulserhaltung (2) kombinieren, dann fällt der Term $M(t_2)$ heraus und man erhält:

$$\frac{m_1(t_1)}{m_2(t_1)} = \frac{u_g}{u - u_g} \tag{4}$$

Wir setzen nun das Ergebnis aus der relativistischen Geschwindigkeitsaddition (1) hier ein und erhalten dann mit der Abkürzung

$$\frac{1}{\gamma_u} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

den Zusammenhang

$$u_g = \frac{c^2}{u} \left(1 - \frac{1}{\gamma_u} \right) \tag{5}$$

Dies setzen wir in (4) ein

$$\frac{m_1(t_1)}{m_2(t_1)} = \frac{\frac{c^2}{u} \left(1 - \frac{1}{\gamma_u} \right)}{u - \frac{c^2}{u} \left(1 - \frac{1}{\gamma_u} \right)}$$

Wir erweitern Zähler und Nenner mit u

$$\frac{m_1(t_1)}{m_2(t_1)} = \frac{c^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma_u}\right)}{u^2 - c^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma_u}\right)}$$

Der Nenner N kann vereinfacht werden

$$N = u^2 - c^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma_u}\right) = c^2 \left(\frac{u^2}{c^2} - 1 + \frac{1}{\gamma_u}\right) = \left(-\frac{1}{\gamma_u^2} + \frac{1}{\gamma_u}\right)$$

Wir setzen den Nenner so wieder ein und man erhält

$$\frac{m_1(t_1)}{m_2(t_1)} = \frac{c^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma_u}\right)}{c^2 \left(\frac{1}{\gamma_u} - \frac{1}{\gamma_u^2}\right)} = \frac{\left(1 - \frac{1}{\gamma_u}\right)}{\frac{1}{\gamma_u} \left(1 - \frac{1}{\gamma_u}\right)} = \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Da wir wissen, dass beide Massen gleich schwer sind, wenn sie ruhen und ansonsten völlig identisch sind, definieren wir die Ruhemasse $m_0 := m_2(t_1)$ als die Masse im ruhenden (unbewegten) Zustand. Die mit Geschwindigkeit u bewegte Masse $m_1(t_1) = m$ nennen wir allgemein bewegte Masse (oder relativistische Masse) m . Somit ist m_0 einfach die Ruhemasse von m und es folgt damit die Formel für die relativistische Masse:

$$m(u) = m(u=0) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = m = m_0 \gamma_u \tag{1.154}$$

Die träge Masse m eines Teilchens nimmt also mit höherer Geschwindigkeit zu.

Man muss zwischen Teilchen unterscheiden, deren Ruhemasse m_0 größer Null ist und Teilchen, deren Ruhemasse gleich Null ist (z.B. Photon).

$$m_0 > 0 \Leftrightarrow u < c \tag{1.162}$$

$$m_0 = 0 \Leftrightarrow u = c$$

Die relativistische Massenzunahme kann auch experimentell nachgewiesen werden (Abb. 1.62). Elektronen werden im E- und B-Feld auf Kreisbahnen beschleunigt. Nur Elektronen mit bestimmter Masse m und Geschwindigkeit gelangen zum Detektor.

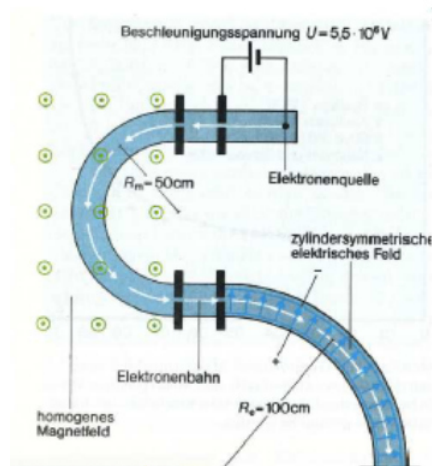


Abbildung 1.62: Experiment zum Nachweis der relativistischen Massenzunahme [3]

In Abbildung 1.63 ist das Ergebnis dargestellt. Die grüne Kurve zeigt das theoretisch erwartete Ergebnis. Die Punkte können verschiedenen Versuchsreihen zugeordnet werden.

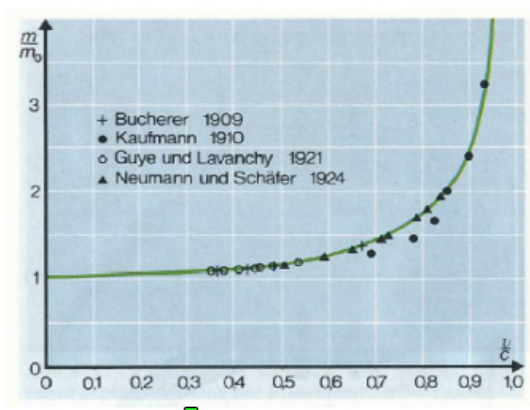


Abbildung 1.63: Experimentelle Ergebnisse der relativistischen Massenzunahme [3]

Der dreidimensionale relativistische Impuls

Der dreidimensionale relativistisch korrigierte Impuls eines Teilchens (Körpers) mit Ruhemasse größer Null, das sich mit Geschwindigkeit u bewegt, lautet also mit Hilfe von (1.161):

$$\vec{p} = m\vec{u} = \gamma_u m_0 \vec{u} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \vec{u} \quad (1.163)$$

Die Geschwindigkeit u , ist hierbei die Geschwindigkeit des Teilchens vom Laborsystem S aus gemessen.

Man erkennt bereits, dass der dreidimensionale relativistische Impuls keine Invariante unter einer LT zwischen verschiedenen Inertialsystemen ist, da die Geschwindigkeit u ebenfalls nicht invariant ist. Der Impuls gemäß (1.163) ist zwar korrekt, aber unvollständig. Die Ruhemasse m_0 hingegen ist eine Invariante der speziellen Relativitätstheorie unter LT, sofern sich das Teilchen nicht mit einem anderen Teilchen verbindet.

1.22.2 Herleitung und Bedeutung der Energie-Masse Äquivalenz $E=mc^2$

Die relativistische Energie-Masse-Äquivalenz kann mit verschiedenen Überlegungen hergeleitet werden.

Wir wählen einen elementaren Gedankengang aus der Mechanik. Um einen Körper der trägen Masse m (nicht-relativistisch) aus der Ruhe auf eine bestimmte Geschwindigkeit innerhalb einer Zeit t zu beschleunigen, muss physikalische Arbeit an diesem Körper verrichtet werden. Das bedeutet, es muss eine Kraft in Richtung der Geschwindigkeit wirken. Danach hat der Körper eine kinetische Energie E_{kin} . Mathematisch wird dies gelöst, indem man das Produkt aus einwirkender Kraft F und dem Wegelement dx für die Bewegung aufsummiert. Dies geschieht anhand des folgenden Integrales.

$$W_a = \int_{t=0}^t \vec{F} d\vec{x}(t) = \int_{t=0}^t m \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} d\vec{x}(t) = \int_0^u m u du = \frac{1}{2} m u^2 := E_{kin}$$

In der SRT kann generell der gleiche Ansatz gewählt werden. Man ersetzt den Ausdruck für den Kraftvektor F unter dem Integral jedoch direkt durch den allgemeingültigen Ausdruck (1.152)

$$E_{kin} = \int_{t=0}^t \vec{F} d\vec{r}(t) = \int_{t=0}^t \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} d\vec{r}(t) = \int_{t=0}^t \frac{\partial(m_u \vec{u})}{\partial t} d\vec{r}(t) = \int_{t=0}^t \left[\frac{\partial m_u}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + m_u \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right] d\vec{r}(t)$$

Wenn alle Vektoren parallel sind folgt

$$E_{kin} = \int_{t=0}^t \left[\frac{\partial m_u}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} + m_u \frac{\partial u}{\partial t} \right] d\vec{r}(t) = \int_{t=0}^t \left[\frac{\partial m_u}{\partial u} u + m_u \right] \frac{\partial u}{\partial t} \cdot d\vec{r}(t) = \int_{u=0}^u \left[\frac{\partial m_u}{\partial u} u + m_u \right] u du$$

Das Integral nach dem letzten Gleichheitszeichen erhält man durch Substitution der Integralgrenzen.

Die Ableitung der relativistischen Masse m_u nach der Geschwindigkeit u kann direkt ausgewertet werden, wenn man die Ableitung des Lorentz-Faktors bildet

$$\frac{\partial m_u}{\partial u} = \frac{\partial(\gamma_u m_0)}{\partial u} = m_0 \frac{\partial \gamma_u}{\partial u} = m_0 \frac{\frac{1}{2} \frac{2u}{c^2}}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = m_0 \gamma_u^3 \frac{u}{c^2} \quad (1.164)$$

Dieses Ergebnis setzen wir oben ein und erhalten

$$E_{kin} = \int_{u=0}^u \left[\frac{m_0}{c^2} \frac{u^2}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{m_0}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] u du = \int_{u=0}^u \frac{m_0 u}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} du$$

Das letzte Integral kann anhand einer Integraltabelle gelöst werden

$$E_{kin} = \int_{u=0}^u \frac{m_0 u}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} du = \left[\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right]_0^u = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = \gamma_u m_0 c^2 - m_0 c^2 = m_u c^2 - m_0 c^2$$

Das bedeutet also, wenn wir den Index „u“ der relativistischen Masse weglassen

$$E_{kin} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = \gamma_u m_0 c^2 - m_0 c^2 = mc^2 - m_0 c^2$$

und damit

$$E_{kin} + m_0 c^2 = mc^2$$

Den Ausdruck $m_0 c^2$ bezeichnen wir als Ruheenergie. Der Energiewert mc^2 muss dann gleichbedeutend mit der Gesamtenergie E , dieses physikalischen Vorganges sein.

$$E = mc^2 = E_{kin} + m_0 c^2 \tag{1.165}$$

Im allgemeinen Fall, sind in der Ruheenergie m_0c^2 alle möglichen Energieformen enthalten, z.B. Wärmeenergie oder chemische Anregungsenergie. Nicht zur Gesamtenergie E zählt die potentielle Energie des Teilchens im Feld einer äußeren Kraft.

Relativistische Gesamtenergie

$$\boxed{E = mc^2 = m_u c^2} \quad (1.166)$$

Die relativistische Gesamtenergie E , ist wie der dreidimensionale relativistische Impuls, keine Invariante unter der LT, da die Geschwindigkeit u der trägen Masse m und damit die Masse selbst, in verschiedenen Inertialsystemen einen anderen Wert hat.

Wir wollen nun zwei Beispiele zur Energie-Masse-Äquivalenz untersuchen und den Zusammenhang zwischen Temperatur, kinetischer Energie und der relativistischen Massenzunahme genauer kennenlernen.

Erwärmung eines Gases

Gemäß der mechanischen Vorstellung und der kinetischen Gastheorie, bedeutet eine Erwärmung eines Gases die Erhöhung der „ungerichteten“ kinetischen Energie der Gasmoleküle. Die SRT geht noch einen Schritt weiter und verbindet diese aufgrund von (1.165), mit einer relativistischen Massenzunahme.

Für die relativistische Masse eines Teilchens der Ruhemasse m_0 mit Geschwindigkeit u gilt bei Anwendung der Taylornäherung:

$$m = m_u = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \dots \right) \quad (1.167)$$

Der zweite Term in der Klammer enthält nach dem Ausmultiplizieren bereits die klassische kinetische Energie:

$$m_u \approx m_0 + \frac{1}{2} m_0 \frac{u^2}{c^2} = m_0 + \frac{E_{kin}}{c^2} \quad (1.168)$$

Bei der Erhitzung eines Gases ist der Temperaturanstieg direkt proportional zum Quadrat der mittleren Geschwindigkeit aller Teilchen

$$T \propto u^2 \quad (1.169)$$

und deshalb ist die relativistische Masse eines unbewegten Gases ebenfalls proportional der Geschwindigkeit der Moleküle im Gas und damit der Temperatur des Gases:

$$m = m_u \propto T \quad (1.170)$$

Es folgt also

$$m_u - m_0 \approx \frac{1}{2} m_0 \frac{u^2}{c^2} = \frac{\Delta E_{kin}}{c^2} \quad (1.171)$$

und somit

$$(m_u - m_0)c^2 \approx \Delta E_{kin} \approx \Delta mc^2 \quad (1.172)$$

Inelastischer Stoß

Wir wollen nun zeigen, dass die relativistischen Massen zweier stoßender Körper zur Gesamtmasse einer neu entstehenden Masse beitragen können.

Zwei völlig starre, gleiche Massen m , stoßen völlig inelastisch mit gleicher Geschwindigkeit zusammen und „verschmelzen“ zu einer neuen Masse M , welche in Ruhe ist.

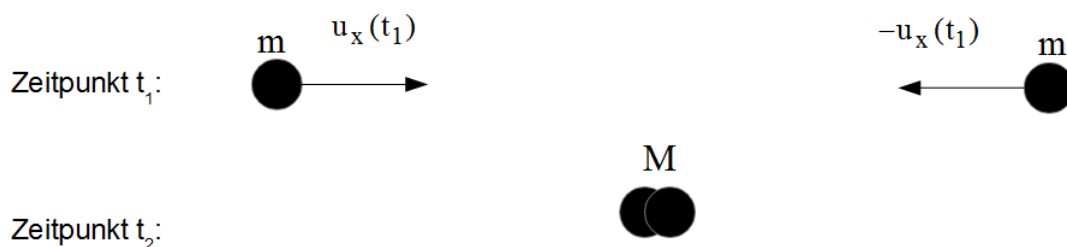


Abbildung 1.64: Völlig inelastischer Stoß und relativistische Massenzunahme

Wir wollen diesen Vorgang zunächst gemäß der Newtonschen Mechanik berechnen und im Anschluss daran die SRT auf den gleichen Stoßprozess anwenden, um die unterschiedlichen Ergebnisse vergleichen zu können.

Impulserhaltungssatz der Newtonschen Mechanik

$$m_0 u(t_1) + m_0 u(t_2) = 0$$

Energieerhaltungssatz

$$\frac{1}{2} m_0 u(t_1)^2 + \frac{1}{2} m_0 u(t_2)^2 = 0 + \Delta E_{diss}$$

$$\Rightarrow \Delta E_{diss} = m_0 u^2$$

Die gesamte kinetische Energie der Teilchen wird also „dissipiert“, das bedeutet, dass diese in Wärmeenergie umgewandelt wird.

Spezielle Relativitätstheorie (Einsteinsche Mechanik)

Wir betrachten den Vorgang aus einem Inertialsystem, das sich mit sehr kleiner Geschwindigkeit $v \approx 0$, senkrecht dazu bewegt (Abb. 1.65)

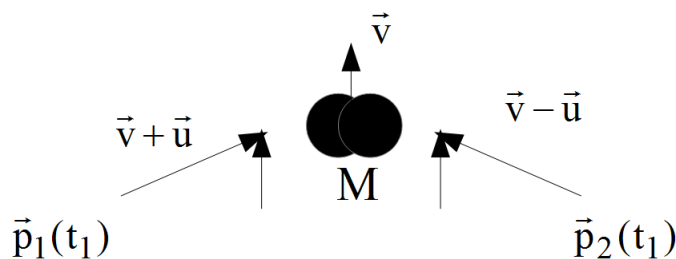


Abbildung 1.65: Völlig inelastischer Stoß und relativistische Massenzunahme aus einem senkrecht dazu bewegten Inertialsystem

Wir bilden nun den Impulserhaltungssatz für den Stoßprozess vom bewegten System aus, für die y-Komponenten des Impulses. Der Betrag der Geschwindigkeit v sei vernachlässigbar.

$$p_{1y}(t_1) + p_{2y}(t_1) \approx 2m_u v = 2\gamma_u m_0 v = p_{1y}(t_2) + p_{2y}(t_2) = M_v v \approx M_0 v \quad (1.173)$$

$$\Rightarrow M_0 = 2m_u = 2\gamma_u m_0$$

Im Gegensatz zur Newtonschen Mechanik erkennt man, dass die, aus dem inelastischen Stoßprozess entstehende neue Ruhemasse M_0 , sich additiv aus den relativistisch bewegten Massen der Stoßpartner zusammensetzt.

Es stellt sich unweigerlich die Frage, woher diese zusätzliche Masse kommt. Nach unserem bisherigen Wissen und (1.172), muss sie aus der kinetischen Energie der Stoßpartner herrühren.

Energieerhaltungssatz

$$\frac{1}{2} m_u u(t_1)^2 + \frac{1}{2} m_u u(t_2)^2 = 0 + \Delta E_{diss} \quad (1.174)$$

$$\Rightarrow \Delta E_{diss} = m_u u^2 = \gamma_u m_0 u^2$$

Die „dissipierte“ Energie enthält nun also die bewegten Massen der Stoßpartner. Gemäß (1.169) und (1.170) trägt diese dissipierte Energie nun zur Erhöhung der inneren kinetischen Energie der Moleküle der Masse M bei.

$$\Delta E = \Delta mc^2 = 2m_0(\gamma_u - 1)c^2 \approx \Delta E_{diss} = \gamma_u m_0 u^2 \quad (1.175)$$

Dies ist eine weitere fulminante Erscheinung und enthält im Kern die Basis für die Teilchenphysik. Es ist ein starker Hinweis darauf, dass sich im Rahmen der SRT Energie- und Impuls eines Teilchens der Masse m vereinen. Die beim inelastischen Stoß übertragene kinetische Energie macht sich als tatsächliche Massenzunahme bemerkbar. Die relativistisch wirksame, zusätzliche kinetische Energie, „vergift“ also zusätzliche träge Masse. Dieser Zusammenhang spielt in Teilchenbeschleunigern, in denen durch Kollisionen, neue Teilchen erzeugt werden, eine große Rolle. Eine weitreichende Eigentümlichkeit, die sich gegenüber der klassischen Mechanik von Stößen ergibt, ist, dass die Lage des Schwerpunktes der stoßenden Teilchen (center of mass), auch von der kinetischen Energie abhängt. (Dies werden wir zu einem späteren Zeitpunkt nochmals genauer untersuchen)

Grundsätzliches zur Energie-Masse-Äquivalenz

Jeder Energie E kann eine Masse $m=E/c^2$ zugeordnet werden, die wegen des großen Divisors c^2 , im Allgemeinen sehr klein sein muss; aber grundsätzlich ist diese Auffassung von größter Bedeutung. Wenn bisher in Einklang mit der Erfahrung behauptet wurde, ein bestimmtes Stück Materie, z.B. ein Stück Kupfer, habe bei 0°C die gleiche Masse wie bei 1000°C , so muss diese Auffassung bei hohen Temperaturen nun revidiert werden. Denn die Temperaturerhöhung kann ja nur erfolgen, indem dem Material eine bestimmte Quantität von Wärmeenergie zugeführt wird. Da diese eine Masse besitzt, muss der Kupferstab bei 1000°C eine größere Masse besitzen als der gleiche Stab bei 0°C .

Es wäre aber keine Waage genau genug, um diese Massenvermehrung nachzuweisen. Ebenso muss der Licht- und Wärmestrahlung, allgemein jeder elektromagnetischen Strahlung, Masse zugeschrieben werden. Allgemein kann gesagt werden, dass Masse und Energie gleichartige Dinge sind, so dass die Massen direkt als gewaltige Energieanhäufungen betrachtet werden können.

Bisher galten in der Physik und Chemie zwei getrennte Erhaltungssätze – für die Masse und Energie – die beide aus experimentellen Untersuchungen erwachsen sind. So wurde untersucht, ob bei einer chemischen Reaktion die Massensumme der Reaktionsteilnehmer vor und nach der Reaktion, die gleiche sei, und die genauesten Wägungen haben niemals einen Unterschied ergeben. Dennoch muss auch diese Auffassung korrigiert werden: denn jeder chemische Prozess gibt Wärme ab oder nimmt Wärme auf. Im Hinblick auf $E=mc^2$, bedeutet das aber, dass nach der Reaktion bei Wärmeabgabe (exotherm) die Massensumme der Reaktionsteilnehmer kleiner geworden ist, als sie vor der Reaktion war, und umgekehrt bei Wärmeaufnahme; auch diese Massenänderungen sind sehr klein. Es ist daher festzustellen, dass die beiden Erhaltungssätze der Masse und der Energie tatsächlich in einen einzigen, z.B. den der Energie zusammenfassbar sind. Wir werden sehen, dass der Impuls dabei integriert wird. Aufgrund des großen Faktors c^2 bedeutet Massen eine sehr hohe Energie, wenn es ermöglicht wird diese direkt komplett zu zerstrahlen: Wenn es möglich wäre, ein Gramm Masse zu vernichten, so ergäbe es $25 \cdot 10^6$ kWh Energie. Da die Sonne dauernd Energie nach allen Seiten ausstrahlt, so muss sie Massen verlieren, und zwar in jeder Minute $2,5 \cdot 10^{11}$ kg. Da die Sonne aber eine Masse von mehr als 10^{30}

kg besitzt, würde es etwa $10 \cdot 10^{13}$ Jahre dauern, bis die Sonne ihre ganze Energie verausgabt hat.

Weitere experimentell bestätigte Auswirkungen der Energie-Masse Äquivalenz

1. Kein Körper der Ruhemasse $m_0 > 0$ kann auf Lichtgeschwindigkeit c beschleunigt werden, da man unendlich viel Energie aufwenden müsste.
2. In Atomkernen haben die gebundenen Protonen und Neutronen eine niedrigere Energie als die freien Teilchen. Dies ist messbar durch die niedrigere Masse.

Beispiel: Alpha-Teilchen ($2p + 2n$).

Die Masse eines Alpha-Teilchens beträgt $6,644 \cdot 10^{-27}$ kg. Vergleicht man dies mit der Summe der Ruhemassen der einzelnen Bestandteile, nämlich 2 Protonen und 2 Neutronen ($2p + 2n$): $6,694 \cdot 10^{-27}$ kg, so erkennt man den Massendefekt.

3. Energie und Materie können direkt ineinander umgewandelt werden

Beispiel: Vernichtung von Teilchen und Antiteilchen

Beispiel: Beim Zusammenstoß von Protonen hoher Energie kann ein massives Pi-Meson erzeugt werden.

Die Energie-Masse Äquivalenz ermöglicht es, die Geschwindigkeit hochenergetischer Teilchen der Geschwindigkeit u , in modernen Teilchenbeschleunigern zu berechnen:

$$\beta_u = \frac{u}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{mc^2}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2} \quad (1.176)$$

E und mc^2 werden oft in Einheiten MeV ausgedrückt, so dass eine angenehme Einheit für den Impuls MeV/c ist.

1.22.3 Die relativistische Energie-Impuls Relation

Die relativistische Masse m , der relativistische Impuls p und die relativistische Gesamtenergie E sind keine invarianten Größen bei der Anwendung einer Lorentz-Transformation. Das bedeutet, dass verschieden gleichförmig bewegte Beobachter (Inertialbeobachter) unterschiedliche Werte dieser Größen messen.

Aus der abgeleiteten Beziehung zwischen kinetischer Energie, Ruheenergie und Gesamtenergie, sowie dem relativistischen Impuls, lässt sich jedoch eine Relation gewinnen, die eine invariante Größe ergibt. Wir wollen dies nun rein algebraisch ableiten. In einem späteren Kapitel werden wir sehen, dass dieser Zusammenhang auch direkt aus der LT folgt.

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 - m^2 u^2 c^2 = m^2 c^4 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = m^2 c^4 \gamma_u^{-2} = m_0^2 c^4 = E_0^2 \quad (1.177)$$

Daraus folgt direkt die relativistische Energie-Impuls Relation

$$\boxed{E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 = E_0^2} \quad (1.178)$$

Die Form der Berechnung der Energie-Impuls Relation erinnert an das Analogon eines rechtwinkligen Dreiecks, in der E die Hypotenuse darstellt. Diese Analogie ist nicht nur zufällig, sondern stellt so etwas wie die Anwendung des Satzes des Pythagoras in der SRT dar.

Diese Energie-Impuls Relation ist auch für Teilchen mit Ruhemasse gleich Null (z.B. Photonen oder Neutrinos) gültig. Sie bildet den Ausgangspunkt für die relativistische Quantenmechanik, die in der Dirac-Gleichung ihren Ausdruck findet.

Die Energie-Impuls Relation für ruhemasselose Teilchen

Die relativistische Energie-Impuls Relation (1.178) ist für alle Teilchen gültig, auch für ruhemasselose Teilchen, wie das Photon oder Neutrino. Für diese gilt jedoch aufgrund der fehlenden Ruhemasse

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} = pc \quad (1.179)$$

Viele Phänomene elektromagnetischer Wellen (z.B. Licht, Radiowellen, Röntgenstrahlen), können nur im Teilchenbild oder aber nur im Wellenbild beschrieben werden. Erst die relativistische Quantenelektrodynamik (QED: Feynman) ergibt ein geschlossenes Bild und die Aufhebung des Welle/Teilchen Dualismus. Wir wollen den Beginn dieser Entwicklung kurz nachzeichnen. Der Zusammenhang zwischen Periodizität (räumlich und zeitlich) sowie der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer beliebigen Welle wird beschrieben durch (1.29) $c = \lambda f$.

Anfang des 19. Jahrhunderts hat man festgestellt, dass elektromagnetische Wellen Energie nur in kleinsten Portionen abgeben können (Strahlungsspektrum glühender Körper --> Plancksches Strahlungsgesetz). Max Planck konnte damit eine Verbindung zwischen Teilchen- und Wellenbild herstellen. Die Energie eines Photons (keine Ruhemasse) bemisst sich demnach zu:

$$E = h \cdot f \quad (1.180)$$

Setzt man dies in (1.179) ein, dann kann man auch ruhemasselosen Teilchen einen Impuls zuweisen:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (1.181)$$

Die Relativitätstheorie stellt also eine Verbindung zur Quantentheorie her. Da der Impuls ein Vektor ist, ist die Richtung von p gleich der Ausbreitungsrichtung der Welle. Dies entspricht der Richtung des Wellenvektors k , welcher senkrecht auf den Wellenfronten steht.

1.22.4 Transformation von Energie und Impuls

Der fundamentale Zusammenhang zwischen Energie- und Impuls wird in der SRT erreicht, wenn man berücksichtigt, dass die Größen Energie E und Impuls p , der LT unterworfen werden müssen.

Ein Körper bewege sich mit Geschwindigkeit u im Inertialsystem S . Das Inertialsystem S' bewege sich in Bezug auf S , mit Geschwindigkeit v . Alle Geschwindigkeiten u , u' seien parallel zur Richtung von v . Der allgemeine Fall, dass Teilchengeschwindigkeit u und Relativbewegung v verschiedene Richtungen haben, wird später berechnet. Wir verwenden nun wieder den Index „ u “ zur Kennzeichnung relativistisch bewegter Größen. Das Inertialsystem S' bewege sich in Bezug auf S mit v in x -Richtung. Ein Teilchen der Ruhemasse m_0 bewege sich in beliebige Richtung mit u bzw u' in S bzw. S' .

In S	In S'	
$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$	$\vec{u}' = \begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{pmatrix}$	(1.188)
$\vec{p} = m\vec{u} = \gamma_u m_0 \vec{u}$	$\vec{p}' = m' \vec{u}' = \gamma'_{u'} m_0 \vec{u}'$	(1.189)
$E = mc^2 = \gamma_u m_0 c^2$	$E' = m' c^2 = \gamma'_{u'} m_0 c^2$	(1.190)

Man sieht sofort, dass die Ruhemasse eine Invariante ist, nicht jedoch die bewegte Masse, weil die Lorentz-Faktoren keine invarianten Größen sind $\gamma_u \neq \gamma'_{u'}$. Für die Herleitung der allgemeingültigen Transformationsformeln ist es wichtig zu erkennen, dass $\gamma_u \neq \gamma'_{u'}$.

Der Zusammenhang zwischen den Lorentz-Faktoren in S und S' , kann mit der relativistischen Geschwindigkeitsaddition hergeleitet werden. Wir berücksichtigen, dass sich für S die Komponenten der Geschwindigkeit u' folgendermaßen berechnen lassen (linke Spalte Formeln 1.101-1.102)

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v \cdot u_x}{c^2}} \quad \text{und} \quad u'_{y,z} = \frac{u_{y,z}}{\gamma_v \left(1 - \frac{v \cdot u_x}{c^2}\right)}$$

Hiermit berechnen wir u'^2 und sehen, dass folgende Hilfsrechnung für die weitere Berechnung nützlich ist

$$\begin{aligned} u'^2 &= \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^{-2} \left[\frac{1}{\gamma_v^2} (u_y^2 + u_z^2) + (u_x - v)^2 \right] = \\ &= \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^{-2} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (u^2 - u_x^2) + u_x^2 + v^2 - 2vu_x \right] = \\ &= \frac{c^2}{\left(c - \frac{vu_x}{c}\right)^2} \left(u^2 - \frac{v^2 u^2}{c^2} + \frac{v^2 u_x^2}{c^2} + v^2 - 2vu_x \right) = \\ &= \frac{c^2}{\left(c - \frac{vu_x}{c}\right)^2} \left(\frac{u^2}{\gamma_v^2} + \left(c - \frac{vu_x}{c}\right)^2 - \frac{c^2}{\gamma_v^2} \right) = \\ &= c^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2} \frac{1}{\gamma_v^2} (u^2 - c^2) \end{aligned}$$

Daraus lässt sich folgern:

$$1 - \frac{u'^2}{c^2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2} \frac{1}{\gamma_v^2} \frac{1}{\gamma_u^2}$$

Dies ermöglicht es uns, den wichtigen Zusammenhang zwischen den nicht-invarianten Lorentz-Faktoren zu berechnen. Für einen Inertialbeobachter in S gilt:

$$\boxed{\gamma'_{u'} = \gamma_u \cdot \gamma_v \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} \quad (1.191)$$

Unter Anwendung der LT für den Lorentz-Faktor (1.191) und der Formel für die rel. Geschwindigkeitsaddition für die x- Richtung, erhält S und zwar in x-Richtung:

$$p'_x = m_0 \gamma'_u u'_x = m_0 \gamma_u \cdot \gamma_u \left(1 - \frac{vu_x}{c^2} \right) \cdot \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} = \gamma_v (m_0 \gamma_u u_x - m_0 \gamma_u v) = \gamma_v \left(p_x - v \frac{E}{c^2} \right)$$

Für die beiden Komponenten senkrecht zu v , p'_y und p'_z erhält S in S' damit:

$$p'_{y,z} = m_0 \gamma'_u u'_{y,z} = m_0 \gamma_u \cdot \gamma_u \left(1 - \frac{vu_x}{c^2} \right) \cdot \frac{1}{\gamma_v} \frac{u_{y,z}}{\left(1 - \frac{vu_x}{c^2} \right)} = m \gamma_u u_{y,z} = p_{y,z}$$

Wie immer erhält man aus p'_x die ungestrichenen Größen, wenn man das Vorzeichen von v umkehrt. Wenn wir p'_x mit der Lorentz-Transformation für die Raumkoordinate x' (1.69) vergleichen,

$$x' = \gamma_v (x - vt)$$

dann sehen wir, dass p die Rolle von x einnimmt und E/c^2 die Rolle von t .

Möchte man also den Impuls in einem anderen System berechnen, so muss man den im eigenen System gemessenen Impuls und die Energie nach obiger Formel mit dem Lorentz-Faktor verrechnen.

Analog zu unserer Schlussfolgerung bei der Lorentz-Transformation, dürfen wir jetzt schließen, dass Impuls- und Energie nicht unabhängig voneinander sein können, sondern sich zu einer neuen Identität vereinen.

Für die Energie erhält man analog:

$$E' = m_0 c^2 \gamma'_u = m_0 c^2 \gamma_u \gamma_v \left(1 - \frac{vu_x}{c^2} \right) = \gamma_v (E - vp_x)$$

Da die LT wechselseitig symmetrisch ist, erhält man die Transformationsformeln für S', indem man $-v$ verwendet und die „ungestrichenen“ Größen durch „gestrichene“ Größen ersetzt.

Wir verwenden die Abkürzung $\beta_x = v_x/c = v/c$ und bringen die Formeln in eine Form, die sich als sehr nützlich für die spätere 4-dimensionale Formulierung erweist. Nutzen wir die Symmetrie der LT aus, dann können wir die Transformationsformeln für die Energie und den Impuls wie folgt zusammenfassen, wenn die Relativbewegung zwischen S und S' in x-Richtung stattfindet:

Für S	Für S'	
$\frac{E'}{c} = \gamma_v \left(\frac{E}{c} - \beta_x \cdot p_x \right)$	$\frac{E}{c} = \gamma_v \left(\frac{E'}{c} + \beta_x \cdot p'_x \right)$	(1.192)
$p'_x = \gamma_v \left(p_x - \beta_x \cdot \frac{E}{c} \right)$	$p_x = \gamma_v \left(p'_x + \beta_x \cdot \frac{E'}{c} \right)$	(1.193)
$p'_{y,z} = p_{y,z}$	$p_{y,z} = p'_{y,z}$	(1.194)

So wie wir bei den Raum- und Zeitkoordinaten festgestellt haben, dass diese eine mächtige invariante Identität in der SRT bilden, nämlich das Raum-Zeit-Intervall, so können wir nun davon ausgehen, dass Energie- und Impuls ebenso eine Invariante bilden. Dies ist die invariante Energie-Impuls Beziehung (1.178), die wir im Abschnitt 1.22.3 bereits algebraisch hergeleitet hatten. Uns ist dabei aufgefallen, dass der Ausdruck an die Form des pythagoreischen Satzes erinnert. Setzt man in (1.178) die abgeleiteten Transformationsformeln für den Impuls p und E/c^2 ein, so sieht man, dass die Energie-Impuls Relation tatsächlich eine invariante Größe ist und den gleichen Wert für alle Inertialbeobachter ergibt.

Diese „Überraschungen“ sind keine Zufälle, denn es zeigt sich, dass eine vollständige Beschreibung der SRT, erst in einem geometrischen 4 dimensionalen Raum mit nicht-euklidischer Geometrie möglich ist.

In diesem 4-dimensionalen Raum, welcher auch Raumzeit oder Minkowski-Raum genannt wird, bilden zum Beispiel die räumlichen Koordinaten x,y,z und die Zeit t einen einzigen 4-dimensionalen Ortsvektor, dessen Komponenten beim Wechsel der Beschreibung von Vorgängen in anderen Inertialsystemen der LT unterworfen werden. Wie wir nun gesehen haben, scheint es daher auch möglich zu sein, aus dem 3 dimensional relativistischen Impuls p und der relativistischen Energie E einen 4

dimensionalen Vektor zu bilden.

Die Definition eines Vektors „lebt“ ja geradezu von seinen Transformationseigenschaften. Und wie wir gesehen haben, erfolgt diese für den relativistischen Impuls p und die Energie E analog zu den Raum- und Zeitkoordinaten. Wir werden diese Ideen im dritten Teil des Buches weiterverfolgen, in dem wir uns mit der Anwendung von 4-Tensoren in der SRT beschäftigen.

1.22.5 Relativistische Teilchenbewegung

Der relativistische Impulssatz zusammen mit der invarianten Energie-Impuls Relation ermöglichen es, relativistische Teilchenbewegungen zu analysieren. Der Impuls eines Teilchens mit zeitlich variabler Geschwindigkeit ist:

$$\vec{p}(t) = \gamma_{u(t)} m_0 \vec{u}(t)$$

Wir lösen das nach der Geschwindigkeit auf

$$\vec{u}(t) = \frac{\vec{p}(t)}{\gamma_{u(t)} m_0}$$

Wendet man die Beziehung $E = mc^2 = \gamma m_0 c^2$ und die Energie-Impuls Relation (1.178) an, dann erhält man eine Bewegungsgleichung, die bei bekanntem zeitlichen Verlauf des Impulses gelöst werden kann:

$$\vec{u}(t) = \frac{c^2}{\sqrt{E_0^2 + p^2 c^2}} \vec{p}(t) \quad (1.195)$$

Wenn die Anfangsbedingungen der Bewegungen bekannt sind, kann diese Gleichung integriert werden um den Ortsvektor zu erhalten.

Horizontaler Wurf

Ein Massenpunkt der Ruhemasse m_0 bewege sich in der xy-Ebene unter dem Einfluss der konstanten Kraft

$$\vec{F} = F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Kraft wirke ab $t=0$. Der Anfangsimpuls bei $t=0$ sei:

$$\vec{p}(t=0) = \begin{pmatrix} p_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für den zeitlichen Impulsverlauf folgt also wegen der konstanten Kraft in y -Richtung, mit

$$\vec{F} = \int \vec{p} dt \quad :$$

der Impuls

$$\vec{p}(t) = \begin{pmatrix} p_0 \\ F \cdot t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad p^2 = F^2 t^2$$

Dies ergibt allgemein für den Geschwindigkeitsverlauf eines Teilchens, mit Anfangsimpuls in x -Richtung, auf das eine Kraft in y -Richtung wirkt bei Anwendung von (1.195):

$$\vec{u}(t) = \frac{c^2}{\sqrt{E_0^2 + F^2 t^2 c^2}} \begin{pmatrix} p_0 \\ Ft \\ 0 \end{pmatrix}$$

Unter den Anfangsbedingungen $r_0=0$ und

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich folgender Bewegungsverlauf in x - und y -Richtung

$$x(t) = \frac{p_0 c}{F} \sinh^{-1} \frac{cFt}{E_0} \quad (1.196)$$

$$y(t) = \frac{E_0}{F} \left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{cFt}{E_0} \right)^2} \right) \quad (1.197)$$

Damit erhält man für die x-y Bahnbewegung

$$y(x) = \frac{E_0}{F} \left(-1 + \cosh \frac{Fx}{p_0 c} \right) \quad (1.198)$$

1.22.6 Doppler-Formel mit SRT und Quantenphysik

In Kapitel 1.18, haben wir den longitudinalen und den transversalen Doppler-Effekt für Elektromagnetische Wellen bereits hergeleitet. Mit den Kenntnissen, die in den vorhergehenden Abschnitten 1.22.4 und 1.22.5 erarbeitet worden sind, ist eine weit-aus elegantere und kompaktere Ableitung eines allgemeingültigen Doppler-Gesetzes möglich.

Im Laborsystem S misst man für die Frequenz des Lichtes eines in beliebiger Richtung bewegten Senders, die Frequenz f und als Richtung wird ein Winkel ϑ gegen die x-Achse gemessen.

Im Laborsystem S erhalten wir anhand der Transformationsformeln für den Impuls und die Energie, die S' anwenden muss, folgende Zusammenhänge. Wir beachten dabei, dass die Energie eines Photons $E=hf$ ist und der Impuls $p=E/c$.

Impuls

$$p_x = \frac{hf}{c} \cos \vartheta = \gamma_v \left(\frac{hf'}{c} \cos \vartheta' + v \frac{hf'}{c^2} \right)$$

$$p_y = p'_y = \frac{hf}{c} \sin \vartheta = \frac{hf'}{c} \sin \vartheta'$$

$$p_z = p'_z = 0$$

Energie

$$E = hf = \gamma_v \left(hf' + v \frac{hf'}{c} \cos \vartheta' \right)$$

Diese Gleichungen lassen sich durch kürzen und ausmultiplizieren vereinfachen:

$$f \cos \vartheta = \gamma_v f' \left(\cos \vartheta' + \frac{v}{c} \right) \quad (1.199)$$

$$f \sin \vartheta = f' \sin \vartheta' \quad (1.200)$$

$$f = \gamma_v f' \left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta' \right) \quad (1.201)$$

Wir dividieren den Ausdruck in (1.199) durch (1.201) und erhalten damit die allgemeingültige Doppler-Formel:

$$\cos \vartheta = \frac{\cos \vartheta' + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta'} \quad (1.202)$$

Ein ganz ähnliches Ergebnis haben wir bei der Herleitung der Aberration des Sternlichtes erhalten. Das heißt also, dass sich nicht nur die Frequenz gemäß dem Doppler-Effekt ändert, sondern dass sich ein Lichtstrahl für verschiedene Inertialbeobachter auch in verschiedene Richtungen bewegt. Im Ruhesystem der Lichtquelle (Sender) wird jeder Beobachter, egal an welchem Ort er sich befindet, die gleiche Frequenz messen. Im Laborsystem wird die Frequenz jedoch vom Winkel ϑ abhängen, welchen das Licht mit der Richtung bildet, in der sich die Quelle zu bewegen scheint.

Die Wellenlängenverteilung dieser langwelligeren Streustrahlung hängt stark vom Streuwinkel Θ ab (siehe Abbildung 1.67). Hier ist die Wellenlänge gegen die Intensität bei verschiedenen Streuwinkeln Θ dargestellt.

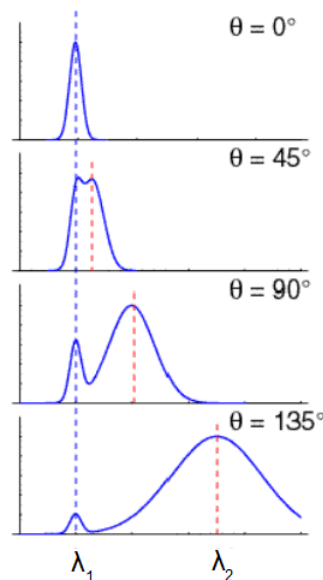


Abbildung 1.67: Schematische Darstellung der Versuchsergebnisse zum Compton-Effekt

Die korrekte Deutung dieses Effektes funktioniert nur, wenn man die Erkenntnisse der SRT mit Prinzipien der Quantenphysik verbindet: Es findet ein elastischer Stoß zwischen einem Röntgenphoton der Energie hf und dem Impuls E/c , mit einem schwach gebundenen Elektron des Streumaterials, welches die Ruheenergie $m_e c^2$ aufweist, statt (Abb. 1.68). Im Folgenden wollen wir den Compton-Effekt anhand von relativistischer Energie- und Impulserhaltung berechnen. Größen mit Index „1“ gelten zum Zeitpunkt t_1 vor dem Stoß des eintreffenden Röntgenphotons, Größen mit Index „2“ zum Zeitpunkt t_2 nach dem Stoß.

Größen mit Index „e“ bezeichnen Energie- und Impuls des („herausgelösten“) Elektrons. Größen mit Index „ph“ bezeichnen Energie- und Impuls des Röntgenphotons.

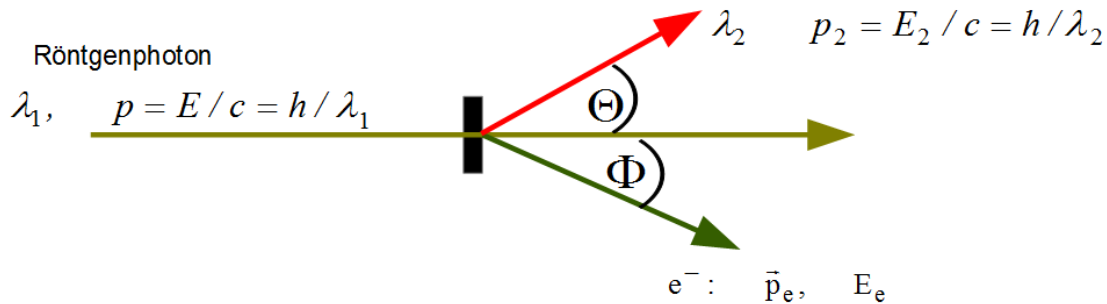


Abbildung 1.68: Schematische Darstellung zur Erklärung des Compton-Effektes

Energieerhaltung

$$E_{ph}(t_1) + E_e(t_1) = E_{ph}(t_2) + E_e(t_2)$$

$$hf_1 + m_e c^2 = hf_2 + \sqrt{(p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4)} \quad (1.203)$$

m_e bedeutet die Ruhemasse des Elektrons.

Impulserhaltung

$$\vec{p}_{ph}(t_1) = \vec{p}_{ph}(t_2) + \vec{p}_e(t_2) \quad (1.204)$$

Wir werten dies für die x- und y-Komponente mit Hilfe von (1.181) separat aus.

$$\text{x-Komponente: } \frac{hf_1}{c} = \frac{hf_2}{c} \cos \Theta + p_e \cos \Phi \quad (1.205)$$

$$\text{y-Komponente: } 0 = \frac{hf_2}{c} \sin \Theta - p_e \sin \Phi \quad (1.206)$$

Aus (1.204) folgt durch umstellen und quadrieren eine nützliche Hilfsrechnung

$$p_e^2(t_2) = p_{ph}^2(t_1) + p_{ph}^2(t_2) - 2p_{ph}(t_1)p_{ph}(t_2)\cos \Theta \quad (1.207)$$

Multiplikation der Gleichung (1.207) mit c^2 und einsetzen von $p_{\text{ph}}(t_1)c = hf_1$ liefert

$$(p_e c)^2 = (hf_1)^2 + (hf_2)^2 - 2h^2 f_1 f_2 \cos \Theta \quad (1.208)$$

Nun nehmen wir unser vorhergehendes Ergebnis aus dem Energieerhaltungssatz (1.203), quadrieren die Gleichung und lösen sie nach $(p_e c)^2$ auf:

$$(p_e c)^2 = (hf_1 - hf_2 + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4 \quad (1.209)$$

Wenn wir nun die Gleichungen (1.208) und (1.209) gleichsetzen und umformen, dann erhalten wir zunächst den Zusammenhang

$$2hf_1 m_e c^2 - 2hf_2 m_e c^2 = 2h^2 f_1 f_2 (1 - \cos \Theta)$$

und daraus die Compton-Streuformel:

$$\boxed{\left(\frac{1}{hf_2}\right) - \left(\frac{1}{hf_1}\right) = (1 - \cos \Theta) \frac{1}{m_e c^2}} \quad (1.210)$$

Wir können mittels $c = \lambda f$ auch nach der Wellenlänge auflösen

$$\boxed{\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda(t_2) - \lambda(t_1) = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \Theta) = \lambda_c (1 - \cos \Theta)} \quad (1.211)$$

Der Wert $\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 2,42 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ heißt Compton-Wellenlänge bei Streuung an

Elektronen. In diesem Fall, haben alle Photonen, die mindestens unter $\Theta = 90^\circ$ gestreut werden, mindestens diese Wellenlänge. Sie ist gleich der Wellenlänge der Anihilationsstrahlung. Erstmals wurde der Compton-Effekt an Elektronen beobachtet. Diese Compton-Streuung (nach Arthur Compton) ist ein wichtiger Ionisationsprozess und der dominierende Wechselwirkungsprozess energiereicher Strahlung mit Materie für Photonenenergien zwischen etwa 100 keV und 10 MeV.

Wenn die Rückstoßenergie der getroffenen Elektronen genügend groß ist, dann kann das Elektron das bindende Atom bzw. Gitter verlassen. Das Elektron ist dann frei

und man beobachtet die Wellenlängenverschiebung der gestreuten Strahlung. Aber sogar bei hohen Energien der Röntgenstrahlung wird die Rückstoßenergie des Elektrons vom Atom bzw. dem Gitter aufgenommen. Aus diesem Grund ist die gestreute Strahlung oft nicht in der Wellenlänge verschoben, da ein schweres Atom oder das Atomgitter der Rückstoßimpuls aufnehmen können, ohne dabei eine große kinetische Energie zu erhalten. Wenn niederenergetische Photonen (Licht, Radiowellen) an Materie gestreut werden, dann können die Elektronen als fest gebunden angenommen werden. Der Rückstoßimpuls wird dann vollständig vom Atom bzw. Gitter absorbiert. Es tritt keine Wellenverschiebung des gestreuten Lichtes ein. Bei niedrigen Energien greift das klassische Thomsonsche Oszillatormodell für die Streuung des Lichtes an Materie.

Im hochenergetischen Fall, den wir soeben berechnet haben, wird jedoch klar, dass die Wechselwirkung von Photonen die im inneren von Materie mit gebundenen Elektronen wechselwirken, nur mit SRT und Quantenphysik erklärt werden kann.

1.22.8 Grundlagen der Teilchenphysik

Betrachten wir Energie und Impuls eines Teilchens in einem Inertialsystem S und in einem Inertialsystem S' , so erhalten wir aufgrund der unter LT invarianten Energie-Impuls Relation (1.178):

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{E'^2}{c^2} - p'^2 = m_0^2 c^2 \quad (1.212)$$

Man beachte, dass im letzten Ausdruck, nur die **Ruhemasse im System S** gemeint ist. Diese muss in S' nicht ruhen. In der Relativitätstheorie müssen darüberhinaus der Impulserhaltungssatz und der Energieerhaltungssatz, wenn Sie relativistisch formuliert werden ebenfalls gelten. Sie gelten jedoch nur innerhalb eines Inertialsystems. Es ist darauf zu achten, dass im Impulserhaltungssatz im Allgemeinen Fall beliebiger Teilchenreaktionen, bei denen neue Teilchen entstehen können, ein Korrekturterm eingeführt werden muss (Dazu später mehr). Dies haben wir bereits beim völlig inelastischen Stoß 2er gleicher Massen mit gleicher Geschwindigkeit gesehen. In einem **geschlossenen System aus n Teilchen** muss deshalb der Impulserhaltungssatz wie folgt gelten

$$\sum \vec{p}_i(t_1) = \sum \vec{p}_i(t_2) + \vec{p}_{Feld} \quad (1.213)$$

Im Fall des völlig elastischen Stoßes ist der Feld-Term gleich null. Der allgemeingültige Energieerhaltungssatz lautet

$$\sum E_i(t_1) = \sum E_i(t_2) \quad (1.214)$$

Beide Erhaltungssätze gelten nur innerhalb eines Inertialsystemes und müssen für ein anderes Inertialsystem entsprechend den Formeln (1.192)-(1.194) transformiert werden.

Für ein Teilchenkollektiv aus n -Teilchen, können wir die Energie-Impuls Relation (1.212) für den Zustand zu einem Zeitpunkt folgendermaßen nutzen, um eine allgemeingültige Relation für zwei Inertialbeobachter zu erhalten:

$$\boxed{\frac{\left(\sum E_i(t_1)\right)^2}{c^2} - \left(\sum p_i(t_1)\right)^2 = \frac{\left(\sum E'_i(t'_1)\right)^2}{c^2} - \left(\sum p'_i(t'_1)\right)^2 = \left(\sum m_{i0}\right)^2 c^2} \quad (1.215)$$

Im letzten Ausdruck sind die Ruhemassen der beteiligten Teilchen im System S gemeint, diese müssen in S' jedoch nicht mehr ruhen.

Relativistisches Schwerpunktsystem

Das Schwerpunktsystem ist ein Koordinatensystem, das sich bezüglich des Laborsystems (S: in welchem experimentiert wird, das gegenüber dem Schwerpunkt eines Teilchenkollektivs ruht) mit der exakt gleichen Geschwindigkeit wie der Schwerpunkt eines Teilchenkollektivs bewegt (v_{sp}). Der Ursprung dieses bewegten Koordinatensystems wird dabei in den Schwerpunkt des Teilchenkollektivs gelegt. Es bietet den Vorteil für die Erklärung von Teilcheninteraktionen wie z.B. Stößen, da der Gesamtimpuls (vektorielle Summe) der beteiligten Massen zu jeder Zeit (vor, wie nach einem Stoß, oder Reaktionsvorgang), wenn ihre Geschwindigkeit eben bezüglich des Schwerpunktes gemessen werden, stets 0 ist. Wir bezeichnen **das Schwerpunktsystem mit S'**.

Um die entsprechenden relativistischen Ausdrücke im Laborsystem zu erhalten, gehen wir zunächst vom Schwerpunktsystem aus und berechnen danach den relativistischen Ausdruck für den Impuls eines Teilchenkollektivs im Laborsystem S.

Wir betrachten zunächst nur eine Bewegungsrichtung des Teilchenkollektivs in x-Richtung.

Im Schwerpunktsystem S' ist der Gesamtimpuls in x-Richtung dann stets 0. Wir nutzen das Transformationsgesetz für Impuls/Energie (1.192)-(1.194) und erhalten:

$$0 = \sum p'_{ix} = \gamma_{sp} \left(\sum p_{ix} - \frac{v_{sp}}{c^2} \sum E_i \right) \quad (1.216)$$

Das Schwerpunktsystem (d.h. auch der Schwerpunkt im Ursprung) bewegt sich mit v_{sp} gegenüber dem Laborsystem.

Im Laborsystem S erhalten wir dann den vektoriell gültigen Zusammenhang zwischen der Bewegung des Schwerpunktsystems und dem Gesamtimpuls mit Hilfe von $p=mv=vE/c^2$ folgendermaßen:

$$\vec{v}_{sp} = \frac{c^2}{\sum E_i} \sum \vec{p}_i \quad (1.217)$$

Wie im Fall der klassischen Mechanik, nutzt man auch im relativistischen Fall das Gedankenbild eines äquivalenten Teilchens, das die Gesamtmasse in sich vereint und sich im Ursprung des Schwerpunktsystems befindet (also im Schwerpunkt selbst). Es bewegt sich dabei mit v_{sp} gegen das Laborsystem. Es gilt dann analog zur klassischen Mechanik:

$$\sum \vec{p}_i = \left(\sum m_i \right) \cdot \gamma_{sp} \vec{v}_{sp} \quad (1.218)$$

Setzen wir (1.218) in (1.217) ein, dann können wir für die bewegte Masse des äquivalenten Teilchens bezüglich des Laborsystemes schreiben

$$\sum m_i = \frac{\sum E_i}{\gamma_{sp} c^2} := \left(\sum m_i \right)_{v_{sp}} \quad (1.219)$$

Das überraschende ist also, dass die Masse des äquivalenten Teilchens im Schwerpunkt (das alle beteiligten Massen repräsentiert) nicht die Summe der Ruhemassen ist. Die Relativistische Energie des äquivalenten Teilchens im Schwerpunkt entspricht der Gesamtenergie des Teilchenkollektivs bezüglich des Laborsystems. Das äquivalente Teilchen mit Masse gemäß (1.219), hat den gleichen Impuls wie es dem Gesamtimpuls aller Teilchen bezüglich des Laborsystems entspricht. Im Schwerpunktsystem S' selbst, ist das äquivalente Teilchen dagegen in Ruhe. Seine Ruhemasse ist daher:

$$\left(\sum m_i \right)_0 = \frac{\sum E'_i}{c^2} \quad (1.220)$$

Die Gesamtenergie ist hier die Summe der Energien im Schwerpunktsystem.

Beispiel: Wenn sich ein Gastank gegenüber dem Laborsystem S in Ruhe befindet, dann ist das Laborsystem das System in dem sich auch der Schwerpunkt der Gasteilchen in Ruhe befindet. Wenn dem System Energie hinzugefügt wird, dann folgt aus der gerade eben abgeleiteten Gleichung (1.220), dass die äquivalente Masse des Teilchenkollektivs sich folgendermaßen geändert haben muss:

$$\Delta\left(\sum m_i\right) = \frac{\Delta\sum E_i}{c^2} \quad (1.221)$$

Alle Experimente haben bisher gezeigt, dass jede Form von Energie die Äquivalenzmasse des Teilchenkollektivs gemäß Gleichung (1.221) beeinflusst.

Im Schwerpunktsystem ist der Gesamtimpuls gleich 0. Wir wenden dies auf (1.215) an und erhalten den für Teilchenstöße nützlichen Zusammenhang

$$\boxed{\frac{\left(\sum E_i(t_1)\right)^2}{c^2} - \left(\sum p_i(t_1)\right)^2 = \frac{\left(\sum E'_i(t'_1)\right)^2}{c^2}} \quad (1.222)$$

Weitere Beispiele:

1. Wenn ein Neutron und ein Proton zusammen ein Deuteron (Kern des Deuteriums) bilden, das eine stabile Konfiguration negativer potentieller Energie darstellt, dann ist die Masse des Deuterons kleiner, als die Summen der Massen der getrennten Teilchen.
2. Wenn ein Gas erhitzt wird, dann wird den Gasmolekülen kinetische Energie übertragen und die Gesamtmasse des Teilchenkollektivs wird vergrößert.
3. Ein System das aus vielen Protonen und Neutronen besteht (Kern eines Atoms) kann seine Konfiguration ändern (Radioaktivität) und Subsysteme bilden (Fissions-Fragmente). Die Masse der Fragmente ist geringer als die Masse des Ausgangsteilchens. Die Fragmente erhalten jedoch zusätzliche kinetische Energie, die genau der Massendifferenz entspricht. Dies ist die innere kinetische Energie bezüglich des

Schwerpunktes, welche dann in Form von Wärme in Nuklearreaktoren oder Atombomben dissipiert wird.

4. Die kinetische Energie schnell bewegter Teilchen kann auch in Strahlung umgewandelt werden, oder einem anderen System Masse verleihen, wie es im Fall der Erzeugung von Pionen aus schnell bewegten Protonen geschieht.

5. So wie wir hier die Masse definiert haben, ist es nicht möglich, die Masse eines Elementarteilchens zu ändern, da es in den experimenten zur Bestimmung der Massen der Elementarteilchen das Ziel ist, die Ruhemasse des Teilchens zu bestimmen. Die Elementarteilchen befinden sich also in Ruhe gegenüber dem Labor. (z.B. Öltröpfchenversuch von Millikan)

Ruhemasselose Teilchen

Teilchenkollektive, die keine Ruhemasse besitzen (Photonen die sich nur in eine Richtung bewegen, oder äquivalent dazu ebene elektromagnetische Wellen), können zwar eine beträchtliche Energie aufweisen. Es ist jedoch nicht möglich, ein Schwerpunktsystem anzugeben, da es kein Koordinatensystem gibt, bezüglich dessen der Impuls verschwinden würde. Dies rührt von der Tatsache, dass c in allen Inertialsystemen gleich ist. Aus der Energie-Impuls Beziehung folgt, dass der Impuls nach (1.181) berechnet werden muss.

1.22.9 Teilchen-Antiteilchen Prozesse

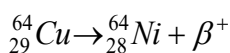
Wenn Energie von einer Form in eine andere umgewandelt werden kann, dann stellt sich aufgrund der Energie-Masse Äquivalenz die Frage, wie irgendeine Form von Stabilität in diesem Universum erreicht wird. Es muss also einige Einschränkungen bei diesen Verwandlungsprozessen geben. In der physikalischen Beschreibung werden solche Prinzipien oft als Erhaltungssätze beschrieben. Einer dieser wichtigen Erhaltungssätze betrifft die elektrische Ladung und besagt, dass die gesamte elektrische Ladung im Universum konstant sein muss.

Das bedeutet zum Beispiel, dass ein einzelnes Elektron nicht einfach verschwinden kann und seine Energie an Photonen abgeben kann.

Aber ein Positron ist ein elektrisch positiv geladenes Teilchen und ansonsten identisch zum Elektron. Ein Elektron-Positron-Paar kann sich tatsächlich in Photonen verwandeln oder aus Photonen gebildet werden ohne den Erhaltungssatz der elektrischen Ladung zu verletzen. Die Ruhemasse eines Elektrons m_e , in Energie-Einheit ausgedrückt, beträgt 0,5108 MeV. Ein Elektron-Positron Paar welches in Ruhe ist im Laborsystem, kann sich gegenseitig vernichten, indem ein Paar Photonen gleicher Energie entsteht, die aufgrund des Impulserhaltungssatzes in genau entgegengesetzte Richtungen davonfliegen. Die Energie jedes dieser Photonen beträgt dann:

$$E_{ph} = hf = m_e c^2 = 0,5108 MeV$$

m_e entspricht hierbei der Ruhemasse eines Elektrons bzw. Positrons. Positronen werden z.B. im Beta-Zerfall emittiert



Wenn Positronen aus einer solchen radioaktiven Quelle an eine Stelle geschossen werden, an der viele Elektronen sind, z.B. in einem Kupfer-Block, dann werden sie in Ruhe gebracht. Die Weglänge der Positronen in Kupfer beträgt ungefähr 300 μm . Im Experiment erhält man, dass monochromatische Gammastrahlung entsteht. In anderen Experimenten zeigt sich, dass pro Positron, 2 Photonen in exakt entgegengesetzte Richtungen davonfliegen.

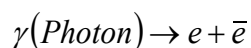
Im umgekehrten Fall ergibt sich, dass sich ein einzelnes Photon nicht einfach in ein

Elektron-Positron-Paar im freien Raum verwandeln kann. Die Forderung der Energieerhaltung ist hier nicht ausreichend. Der Impuls muss auch erhalten bleiben. In solch einem Prozess wäre das nicht der Fall. Wenn wir den Vorgang der Paar-Produktion nur im Schwerpunktsystem des erzeugten Paares betrachten, wäre der Gesamtimpuls 0. Da sich aber Licht in allen Inertialsystemen mit c ausbreitet, kann der Impuls des Photons nicht 0 sein.

Die Impulserhaltung verbietet also die Paar-Produktion im freien Raum, aber die Paar-Erzeugung kann in der Umgebung eines dritten Teilchens stattfinden, dessen Rückstoß den Impuls erhalten kann. Die Paar-Produktion findet üblicherweise in der Nähe von Atomkernen statt.

Aufgrund der Energieerhaltung kann die Paar-Produktion nicht bei Photonenenergien stattfinden, die unterhalb der Summe der Ruhemassen-Energie (Ruheenergie) der beiden Teilchen liegen.

Ein sehr beeindruckendes Beispiel der Energie/Masse Äquivalenz ist die Paar-Erzeugung, bei der aus einem Gammaphoton ein Elektron und ein Positron entsteht:



Die notwendige Energie des Photons ist

$$E_{\text{photon}} \geq 2m_e c^2 = 1,02..MeV$$

Die Erzeugung eines Elektron-Positron-Paares aus einem energiereichen Photon wurde 1933 als erster Paar-Bildungsprozess experimentell durch Irène Curie und Frédéric Joliot nachgewiesen. Diese Paarbildung stellt einen wichtigen Prozess der Wechselwirkung von Photonen mit Materie dar. Sie führt z. B. in Blaskammern zu charakteristischen Spuren. Man unterscheidet zwei Fälle: Die Paarbildung kann durch Wechselwirkung eines Photons mit dem elektrischen Feld eines Atomkerns, oder eines Hüllenelektrons stattfinden.

1.22.10 Proton-Antiproton Paar-Bildung

Das Antiproton wurde erstmals 1955 im Lawrence Berkeley National Laboratory mit einem Protonenstrahl von 6,3 GeV, der auf ein Kupfertarget traf, künstlich erzeugt. Die im Schwerpunktsystem verfügbare Energie reicht gerade zur Nukleonenpaar-Erzeugung (Proton und Antiproton), so dass das Antiproton sich nur langsam bewegt. Die magnetische Ablenkung von Teilchen negativer Ladung erlaubte ein „Aussortieren“ der Antiprotonen. Aus der Impuls- und Geschwindigkeitsanalyse in zwei Szintillationszählern ergab sich der Nachweis, dass negativ geladene Partikel mit Protonenmasse entstanden waren: Die Unterdrückung des Mesonenuntergrundes erfolgte durch geeignete Koinzidenzschaltungen.

Wir wollen nun den Prozess relativistisch vereinfacht berechnen. Dieser diene als beispielhafte Berechnung eines 2-Körper Stoßes, bei denen 1 Stoßpartner zu Beginn in Ruhe ist. Wir werden feststellen, dass es notwendig ist, den Vorgang im Schwerpunktsystem ebenfalls zu berücksichtigen.

Proton p_1 trifft im Laborsystem S mit hoher Energie E_{kin1} auf das ruhende Proton p_2 . Bei genügend hoher Energie entsteht ein zusätzliches Proton-Anti-Proton Paar $p\bar{p}$

„ p “ mit oder ohne Index steht für Proton. In Abbildung 1.69 ist der Prozess schematisch dargestellt.

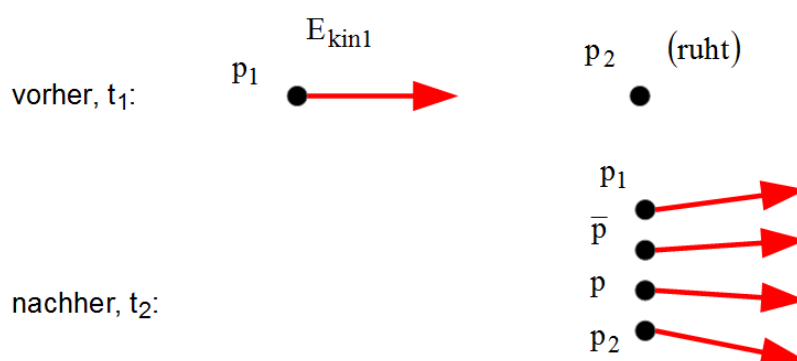


Abbildung 1.69: Schematische Darstellung zur Proton-Anti-Proton Paar-Bildung

Für die Erzeugung 2er zusätzlicher Massen mit jeweils der Masse eines Protons, sollte gemäß dem Energieerhaltungssatz das Proton 1 mindestens folgende kinetische Energie mitbringen

$$E_{kin1} = 2m_p c^2 = 1,88...GeV$$

Das Proton-Anti-Proton Paar wäre nach dieser Hypothese nach der Erzeugung in Ruhe gegenüber dem Labor. Diese Energiemenge reicht jedoch für den Laboranten aufgrund der Relativitätstheorie nicht aus. Wir formulieren nun den Energieerhaltungssatz und den Impulserhaltungssatz im Laborsystem S, in dem das Proton 2 ruht. Die Indizes in den Energie- und Impuls-Termen stehen für die Teilchennummern.

Bei der Energieerhaltung müssen sowohl die Ruheenergie, als auch zusätzliche kinetische Energie, sofern vorhanden, berücksichtigt werden.

Energieerhaltung im Laborsystem S

$$\sum E_i(t_1) = 2m_p c^2 + E_{1kin}(t_1) = 4m_p c^2 + E_{kin}(t_2) = \sum E_i(t_2) \quad (1.223)$$

Impulserhaltung im Laborsystem S

$$\sum \vec{p}_i(t_1) = \sum \vec{p}_i(t_2) = p_1(t_1) \quad (1.224)$$

Aufgrund der Impulserhaltung sieht man auch schon, dass die Teilchen nach dem Stoß nicht in Ruhe sein können, sondern zusätzliche Energie haben müssen (E_{kin}, \dots). Im Laborsystem ist die Gesamtenergie $4m_p c^2$ deshalb nicht ausreichend für die Reaktion.

Wir haben jedoch bereits gesehen, dass der Impuls bezüglich des Schwerpunktsystems eines Teilchenkollektivs stets gleich 0 ist (1.222). Das bedeutet dann, dass im Schwerpunktsystem die Energie von $4m_p c^2$ ausreichend ist für die Reaktion. Wir formulieren die Erhaltungssätze noch im Schwerpunktsystem S'.

Energieerhaltung im Schwerpunktsystem S'

$$\sum E'_i(t'_1) = \sum E'_i(t'_2) = 4m_p c^2 \quad (1.225)$$

Impulserhaltung im Schwerpunktsystem S'

$$\sum \vec{p}'_i(t'_1) = \sum \vec{p}'_i(t'_2) = 0$$

Um nun die ausreichende kinetische Energie des Protons 1 im Laborsystem S berechnen zu können, müssen wir die invariante Energie-Impuls Beziehung aus (1.222) für den 2-Körperstoß nutzen. Wir beachten dabei, dass Proton 2 vor dem Zusammenstoß im Laborsystem ruht. Für den Zeitpunkt vor dem Stoß gilt also:

$$\left(\sum E'_i(t'_1) \right)^2 = \left(\sum E_i(t_1) \right)^2 - c^2 \cdot \left(\sum p_i(t_1) \right)^2 \quad (1.226)$$

Und somit

$$(E'_1(t'_1) + E'_2(t'_1))^2 = (E_1(t_1) + E_2(t_1))^2 - c^2 p_1(t_1)^2 \quad (1.227)$$

Wir beachten wegen $E_{kin} = 1/2mv^2 \rightarrow (cp)^2 = 2E_{kin}mc^2$, den folgenden Zusammenhang

$$(cp_1(t_1))^2 = 2E_{1kin}(t_1)m_p c^2$$

Wir setzen dies in (1.227) ein und beachten den Ausdruck in (1.223) nach dem ersten Gleichheitszeichen

$$\begin{aligned} (E'_1(t'_1) + E'_2(t'_1))^2 &= (E_1(t_1) + E_2(t_1))^2 - c^2 p_1(t_1)^2 = \left(2m_p c^2 + E_{1kin}(t_1) \right)^2 - 2E_{1kin}(t_1)m_p c^2 = \\ &= 4(m_p c^2)^2 + 2E_{1kin}(t_1)m_p c^2 + E_{1kin}(t_1)^2 \end{aligned} \quad (1.228)$$

Der Wert für die linke Seite der Gleichung ergibt sich aus (1.225)

$$(E'_1(t'_1) + E'_2(t'_1))^2 = \left(4m_p c^2 \right)^2 \quad (1.229)$$

Damit folgt folgende Gleichung mit der einzig unbekanntem kinetischen Energie des stoßenden Protons zur Zeit t_1

$$(4m_p c^2)^2 = 4(m_p c^2)^2 + 2E_{1kin}(t_1)m_p c^2 + E_{1kin}(t_1)^2$$

Dies ist eine einfache quadratische Gleichung und sie kann nach der kinetischen Energie E_{1kin} des Proton 1 vor dem Stoß wie folgt umgeformt werden

$$E_{1kin}(t_1)^2 + 2E_{1kin}(t_1)m_p c^2 - 12(m_p c^2)^2 = 0$$

Diese Gleichung kann mit der einfachen Lösungsformel für quadratische Gleichungen gelöst werden wenn beachtet wird, dass die kinetische Energie positives Vorzeichen haben muss. Somit gilt für die mindestens nötige kinetische Energie von Proton 1 im Laborsystem S

$$E_{1kin}(t_1) = -m_p c^2 \pm \sqrt{(m_p c^2)^2 + 12(m_p c^2)^2} = 2,6m_p c^2 = 2,44 \text{ GeV} \quad (1.230)$$

Die Gesamtenergie der beiden Protonen vor dem Stoß im Laborsystem S muss also mindestens $4,6m_p c^2$ betragen (einschließlich der Ruhemassen der beiden Protonen vor dem Zusammenprall).

1.22.11 Relativistisches Trägheitsgesetz und Transformation der Kraft

Bisher haben wir noch kein relativistisches Gesetz abgeleitet, das Kräfte mit der zeitlichen Änderung von Bewegungen eines Körpers (d. i. Beschleunigung) in Verbindung bringt. Wir benötigen also ein relativistisches Trägheitsgesetz.

Die folgenden Überlegungen führen uns zu einem dreidimensionalen relativistischen Trägheitsgesetz, das jedoch relativistisch unvollständig ist. Wir werden sehen, dass wir zur Vervollständigung einen Zusammenhang mit der zeitlichen Änderung der relativistischen Energie (relativistische Leistung) benötigen.

Ähnlich wie der dreidimensionale relativistische Impuls im Rahmen der SRT durch die relativistische Energie ergänzt wird (Abschnitt 1.22.5), so ist auch für die korrekte Beschreibung der Änderung von Bewegungsvorgängen, ein Bezug zur zeitlichen Änderung der relativistischen Energie E nötig.

Eine konsistente und vollständige Formulierung der Bewegungsgesetze gelingt eleganter erst im Rahmen der Raum-Zeit (Minkowski-Raum) Beschreibung der SRT mit 4-Tensoren. Die Rolle des Kraftbegriffes nimmt hier ein 4-Tensor, die sogenannte Minkowski-Kraft ein. Wir werden uns damit im dritten Teil dieses Buches ausführlich beschäftigen. Nun verfolgen wir weiter unsere dreidimensionale Formulierung der SRT, so wie sie von Einstein Anfang des 20. Jahrhunderts geprägt wurde.

Wir stellen uns nun die Frage, welche Konsequenzen sich aus dem relativistisch korrigierten Impuls (1.163), für die Bewegungsgleichung (1.153) ergeben. Das Einwirken einer relativistisch formulierten äußeren Kraft auf einen Körper (Teilchen), der sich mit Geschwindigkeit u bewegt, sollte also folgendermaßen zu einer Impulsänderung des Körpers führen:

$$\vec{F} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \frac{\partial(m_u \vec{u})}{\partial t} = m_0 \frac{\partial(\gamma_u \vec{u})}{\partial t} = m_0 \left(\frac{\partial \gamma_u}{\partial t} \vec{u} + \gamma_u \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) = m_0 \left(\frac{\partial \gamma_u}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \vec{u} + \gamma_u \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) \quad (1.231)$$

Bei der notwendigen vollständigen Ableitung des Lorentz-Faktors müssen wir den Vektorcharakter der Geschwindigkeit beachten

$$\frac{\partial \gamma_u}{\partial t} = \frac{\partial \gamma_u}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\frac{1}{2} \frac{u}{c^2}}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial u}{\partial t} = \gamma_u^3 \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{c^2} \quad (1.232)$$

Hierbei haben wir folgende Erkenntnisse aus der Differentialrechnung mit Vektoren benutzt. Für das Quadrat des Geschwindigkeitsvektors u gilt:

$$u^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$

und für Differentiale eines Produktes von Vektoren

$$d(\vec{c} \cdot \vec{d}) = d\vec{c} \cdot \vec{d} + \vec{c} d\vec{d} \quad \text{also} \quad d u^2 = d(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 2\vec{u} d\vec{u}$$

somit

$$\frac{\partial(u^2)}{\partial t} = \frac{\partial(\vec{u} \cdot \vec{u})}{\partial t} = 2\vec{u} \vec{a} = 2u a_{//u}$$

Und dies impliziert dann den Zusammenhang (1.232)

$$\frac{\partial \gamma_u}{\partial t} = \gamma_u^3 \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{c^2}$$

Wir setzen das nun in (1.231) ein und erhalten ein dreidimensionales relativistisches Kraftgesetz unter dem vorgemerkten Vorbehalt, dass dieses jedoch unvollständig ist.

$$\vec{F} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = m_0 \gamma_u \left(\frac{1}{c^2} \gamma_u^2 (\vec{u} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{u} + \vec{a} \right) \quad (1.233)$$

Eine „haarsträubend“ anmutende Konsequenz erhalten wir, wenn wir die Beschleunigung parallel und senkrecht zur vorhandenen Geschwindigkeit u zerlegen:

$$\vec{a} = \vec{a}_{//u} + \vec{a}_{\perp u} \quad (1.234)$$

Setzt man das in (1.233) ein, dann folgt daraus

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = m_0 \gamma_u \left(\frac{1}{c^2} \gamma_u^2 (\vec{u} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{u} + \vec{a} \right) = m_0 \gamma_u \left(\frac{1}{c^2} \gamma_u^2 \cdot u a_{//u} u \vec{e}_{//} + \vec{a}_{//} + \vec{a}_{\perp} \right) = \\ &= m_0 \gamma_u \left(\left(\gamma_u^2 \frac{u^2}{c^2} + 1 \right) \vec{a}_{//u} + \vec{a}_{\perp u} \right) = m_0 \gamma_u \left(\gamma_u^2 \vec{a}_{//u} + \vec{a}_{\perp u} \right) \end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt also für das dreidimensionale relativistische Trägheitsgesetz, wenn die resultierende Beschleunigung parallel und senkrecht zur vorhandenen Teilchengeschwindigkeit u zerlegt wird:

$$\vec{F} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = m_0 \gamma_u (\gamma_u^2 \vec{a}_{//u} + \vec{a}_{\perp u}) = m_0 (\gamma_u^3 \vec{a}_{//u} + \gamma_u \vec{a}_{\perp u}) \quad (1.235)$$

Der Körper setzt also der Änderung seines Bewegungszustandes offensichtlich unterschiedliche Widerstände entgegen, je nach dem, wie der Kraftvektor zur ursprünglichen Richtung der Geschwindigkeit u gerichtet ist. Anfang des 20. Jahrhunderts sprach man deshalb auch von longitudinaler und transversaler bewegter Masse.

$$\vec{F}_{//u} = \gamma_u^3 \cdot m_0 \vec{a}_{//u} \quad (1.236)$$

$$\vec{F}_{\perp u} = \gamma_u \cdot m_0 \vec{a}_{\perp u} \quad (1.237)$$

Die Konsequenz ist, dass die resultierende Beschleunigung eines Teilchens, also dessen zeitliche Bewegungsänderung, nicht parallel zur äußeren einwirkenden Kraft ist, da die Kraft in Richtung u einen kleineren Einfluss auf die Bewegungsänderung hat wegen γ^3 . Dies führt im allgemeinen Bewegungsfall zu einer Verletzung des Drehimpulserhaltungssatzes und damit auch des Relativitätsprinzips.

Wir sehen also, dass (1.235) nicht vollständig sein kann. Wir zeigen an folgendem Beispiel, dass wir (1.235) nicht für den Fall mehrdimensionaler Bewegungsvorgänge anwenden dürfen.

Beispiel: Ein Teilchen der Ruhemasse m_0 , bewege sich in der xy -Ebene, $u_z=0$ unter dem Einfluss der Kraft

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es resultiert daraus eine Beschleunigung ebenfalls in der xy-Ebene

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir wählen den Ansatz (1.231)

$$\vec{F} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \frac{\partial(m_u \vec{u})}{\partial t} = m_0 \frac{\partial(\gamma_u \vec{u})}{\partial t}$$

Wir berechnen zunächst die x-Komponente der Kraft F

$$F_x = m_0 \frac{\partial(\gamma_u u_x)}{\partial t} = m_0 (u_x \dot{\gamma}_u + \gamma_u a_x)$$

In diesem zweidimensionalen Bewegungsfall folgt, wegen

$$\frac{\partial \gamma_u}{\partial t} = \dot{\gamma}_u = \gamma_u^3 \frac{(u_x a_x + u_y a_y)}{c^2}$$

für die Beschleunigung, welche von F_x hervorgerufen wird

$$\frac{F_x}{m_0} = \gamma_u^3 \left((1 - \beta_y^2) \cdot a_x + \beta_x \beta_y a_y \right)$$

F_x führt also gemäß unserem unvollständigen relativistischen Kraftgesetz (1.235) zu einer Beschleunigung nicht nur in x-Richtung, sondern auch in y-Richtung.

Analog erhält man auch ein überraschendes Ergebnis für die Beschleunigung, die durch F_y hervorgerufen wird. Es ergibt sich allgemein

$$\frac{\frac{F_x}{m_0}}{\frac{F_y}{m_0}} = \frac{\gamma_u^3 \left((1 - \beta_y^2) \cdot a_x + \beta_x \beta_y a_y \right)}{\gamma_u^3 \left((1 - \beta_x^2) \cdot a_y + \beta_x \beta_y a_x \right)} = \frac{F_x}{F_y} = \frac{(1 - \beta_y^2) \cdot a_x + \beta_x \beta_y a_y}{(1 - \beta_x^2) \cdot a_y + \beta_x \beta_y a_x} \quad (1.238)$$

Angenommen man möchte das Teilchen nur in y-Richtung beschleunigen, also $a_x=0$, dann muss gemäß dieses Bewegungsgesetzes trotzdem eine Kraft in x-Richtung aufgebracht werden:

$$F_x = F_y \frac{(1 - \beta_y^2) \cdot a_x + \beta_x \beta_y a_y}{(1 - \beta_x^2) \cdot a_y + \beta_x \beta_y a_x} = F_y \frac{\beta_x \beta_y a_y}{(1 - \beta_x^2) \cdot a_y} = F_y \frac{\beta_x \beta_y}{(1 - \beta_x^2)}$$

Dieses theoretische Ergebnis kann nicht vollständig sein. Es würde eine Verletzung des Drehimpulserhaltungssatzes bedeuten. Wir stellen also unser Ergebnis für das relativistische Trägheitsgesetz für den allgemeinen Fall mehrdimensionaler Bewegungen noch etwas zurück, da es so nicht richtig sein kann.

Betrachten wir die allgemeine Formel (1.238) für sehr kleine Geschwindigkeiten, dann führt es konsequenterweise zur bekannten Newtonschen Mechanik:

$$\beta_x \beta_y \rightarrow 0 \text{ und } \frac{1 - \beta_y^2}{1 - \beta_x^2} \rightarrow 1 \text{ führen zu } \frac{F_x}{F_y} = \frac{a_x}{a_y}$$

Relativistische Leistung und Kraftbegriff

Innerhalb eines Inertialsystemes gilt für die relativistische Energie nach (1.165)

$$E_{kin} + m_0 c^2 = \gamma_u m_0 c^2 = m c^2 = E$$

Man beachte hierbei, dass in der Ruheenergie $m_0 c^2$ alle möglichen Energiebeiträge des Teilchens enthalten sind. Wir wollen die zeitliche Änderung der Gesamtenergie E mit der Kraftwirkung in Verbindung bringen. Ein Teilchen der Ruhemasse m_0 bewege sich mit zeitlich variabler Geschwindigkeit $u(t)$. Die Energie des Teilchens ändert sich dadurch zeitlich

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial(m_0 c^2 + E_{kin})}{\partial t} = \frac{\partial(E_{kin})}{\partial t} \quad (1.239)$$

Wir berücksichtigen nun den sehr nützlichen Zusammenhang

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m} \quad (1.240)$$

und zeigen dass für die zeitliche Änderung der kinetischen Energie aus der klassischen Physik gilt:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial(E_{kin})}{\partial t} = \frac{1}{2m} \frac{\partial p^2}{\partial t} = \frac{1}{2m} \frac{\partial(\vec{p} \cdot \vec{p})}{\partial t} = \frac{1}{2m} 2\vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \cdot \vec{u} = \vec{F} \cdot \vec{u} \quad (1.241)$$

Man erkennt in (1.241), die zeitliche Änderung der Energie vom Krafteinfluss herührt. Die SRT liefert mit der Energie-Masse Äquivalenz nun den Beweis, dass damit alle möglichen Energieformen einbezogen werden, während es in der Mechanik nur die Änderung der mechanischen Energie war. Die zeitliche Änderung der relativistischen Energie E können wir auch als relativistische Leistung bezeichnen. Desweiteren erkennt man, dass ein relativistischer Zusammenhang zwischen Kraft und Energie bestehen muss. Da beide nicht invariant unter LT sind und über die Zeit, welche ebenfalls nicht invariant ist, verknüpft sind, ist es sinnvoll nach einer Verbindung im Rahmen einer erweiterten Beschreibung der SRT, zu suchen. Wie eingangs bereits erwähnt gelingt dies im Rahmen der Beschreibung der SRT mit 4-Tensoren im flachen Minkowski-Raum.

Transformation der Kraft und der relativistischen Leistung

Das Inertialsystem S' bewege sich in Bezug auf S mit v in x -Richtung. Ein Teilchen der Ruhemasse m_0 bewege sich in beliebige Richtung mit u bzw. u' in S bzw. S' .

Um die Kraft F transformieren zu können, benötigen wir die Transformation der zeitlichen Ableitung des Impulses. Es sind also Ableitungen der Form $\frac{\partial}{\partial t'}$ zu bilden. Wir benötigen deshalb einen Ableitungsoperator für Zeitableitungen von physikalischen Größen, wenn man diese Größen nur in S kennt, aber für einen Inertialbeobachter S' berechnen möchte.

Wir erhalten diesen Operator mit einer kurzen Zwischenrechnung: Für die zeitliche Ableitung der Lorentz-Transformationsformel für t' (linke Spalte in (1.68)) gilt

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \gamma_v \left(1 - \frac{v_x u_x}{c^2} \right)$$

Für die Zeit-Differentiale gilt somit

$$dt' = \gamma_v \left(1 - \frac{v_x u_x}{c^2} \right) \cdot dt$$

Wir vergleichen den Ausdruck nach dem Gleichheitszeichen mit (1.191) und können den ersten Teil nach dem Gleichheitszeichen ersetzen

$$dt' = \frac{\gamma'_{u'}}{\gamma_u} \cdot dt$$

Und damit können wir den gesuchten Ableitungsoperator bilden

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\gamma_u}{\gamma'_{u'}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \tag{1.242}$$

Wenden wir diesen Operator beispielsweise auf eine Größe A an, welche in S bekannt ist, dann erhält S' mit (1.242) für die zeitliche Ableitung dieser Größe für einen Inertialbeobachter in S'

$$\frac{\partial A'}{\partial t'} = \frac{\gamma_u}{\gamma'_{u'}} \cdot \frac{\partial A}{\partial t}$$

Damit können wir nun die Lorentz-Transformation der Kraft \vec{F} für S bilden:

$$\vec{F}' = \frac{\partial \vec{p}'}{\partial t'} = \frac{\gamma_u}{\gamma'_{u'}} \cdot \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}$$

Wir lösen dies für die x -Richtung, welche parallel zur Relativbewegung von S und S' mit v liegt und erhalten mit der Abkürzung $\beta_x = v_x/c$

$$\vec{F}'_x = \frac{\partial \vec{p}'_x}{\partial t'} = \frac{\gamma_u}{\gamma'_{u'}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\gamma_v \left(p_x - \beta_x \frac{E}{c} \right) \right) = \gamma_v \frac{\gamma_u}{\gamma'_{u'}} \left(F_x - \beta_x \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c} \right)$$

Für die beiden Komponenten senkrecht zu v , F'_y und F'_z erhält S in S' mit (1.191)

$$\vec{F}'_{y,z} = \frac{\gamma_u}{\gamma'_{u'}} \vec{F}_{y,z} = \frac{1}{\gamma_v \left(1 - \frac{v_x u_x}{c^2} \right)} \vec{F}_{y,z}$$

Aufgrund der zuvor abgeleiteten Beziehung zwischen relativistischer Leistung und der Kraft (1.241), bilden wir noch die Transformation der relativistischen Leistung:

$$\left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c} \right)' = \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{E'}{c} \right) = \frac{\gamma_u}{\gamma'_{u'}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\gamma_v \left(\frac{E}{c} - \beta_x p_x \right) \right] = \gamma_v \frac{\gamma_u}{\gamma'_{u'}} \left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c} - \beta_x F_x \right) = \frac{\frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c} - \beta_x F_x}{1 - \frac{v_x u_x}{c^2}}$$

Da die Lorentz-Transformation symmetrisch ist, erhält S' die korrekten Transformationsformeln, indem er die „ungestrichenen“ Größen durch „gestrichene“ ersetzt und anstelle von $+v_x$, $-v_x$ verwendet.

Wir fassen die gewonnenen Transformationsformeln für die Kraft und die relativistische Leistung in folgender Tabelle zusammen.

Hier ist zu beachten, dass die Relativbewegung von S und S' mit Geschwindigkeit v in x-Richtung stattfindet und der Körper auf den die Kraft wirkt, sich mit Geschwindigkeit u bzgl. S in beliebiger Richtung bewegt.

Für S	Für S'	
$\left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c}\right)' = \frac{\left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c}\right) - \beta_x \cdot F_x}{1 - \frac{v_x u_x}{c^2}}$	$\left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c}\right) = \frac{\left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c}\right)' + \beta_x \cdot F'_x}{1 - \frac{v_x u'_x}{c^2}}$	(1.243)
$\vec{F}'_x = \frac{F_x - \beta_x \cdot \left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c}\right)}{1 - \frac{v_x u_x}{c^2}}$	$\vec{F}_x = \frac{F'_x + \beta_x \cdot \left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c}\right)'}{1 + \frac{v_x u'_x}{c^2}}$	(1.244)
$\vec{F}'_{y,z} = \frac{\vec{F}_{y,z}}{\gamma_v \left(1 - \frac{v_x u_x}{c^2}\right)}$	$\vec{F}_{y,z} = \frac{\vec{F}'_{y,z}}{\gamma_v \left(1 + \frac{v_x u'_x}{c^2}\right)}$	(1.245)

Die Kraft F und die relativistische Leistung stehen in einer ähnlich weitreichenden Verbindung zueinander, wie Energie und Impuls.

Die Kraft F allein genügt nicht, um im Rahmen der SRT, physikalische Vorgänge vollständig, ohne Widerspruch zum Relativitätsprinzip zu beschreiben. Dazu sehen wir uns folgende Beispiele genauer an.

Beispiele:

1. Wenn in einem Inertialsystem in einem abgeschlossenen 2-Körper System $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$ gilt, dann lässt sich, wenn die Kraft zwei Komponenten hat, immer ein Inertialsystem S' finden, in dem $\vec{F}'_1 \neq \vec{F}'_2$ gilt. Dies steht im Widerspruch zum experimentell bestätigten Relativitätsprinzip, wonach es nicht möglich ist, anhand einer physikalischen Beobachtung innerhalb eines Inertialsystems feststellen zu können, ob man sich

gleichförmig bewegt oder ruht. Es muss berücksichtigt werden, dass die Kraft F allein, die Vorgänge in Inertialsystemen nicht vollständig beschreiben kann. Es muss die zeitliche Energieänderung zusätzlich berücksichtigt werden. Ansonsten entstehen scheinbare Paradoxa, wie das Folgende.

2. Hebel-“Paradoxon“

Es handelt sich um kein richtiges Paradoxon, da es bei korrekter Anwendung der relativistischen Gesetzmäßigkeiten aufgelöst wird.

In S sei ein drehbarer Hebel, wie in Abbildung 1.70 skizziert, aufgebaut. Für einen Inertialbeobachter in S gilt $a=b$ und die Beträge der Kräfte F_x und F_y sind exakt gleich. Dann resultiert daraus kein Drehmoment und der Hebel bleibt in Ruhe

$$M_{res} = M_x + M_y = -F_x b + F_y a = 0 \quad (1.246)$$

Da der Hebel in Ruhe ist, bedeutet dies für den Inertialbeobachter in S , dass die Geschwindigkeit des Hebels $\vec{u} = 0$ ist.

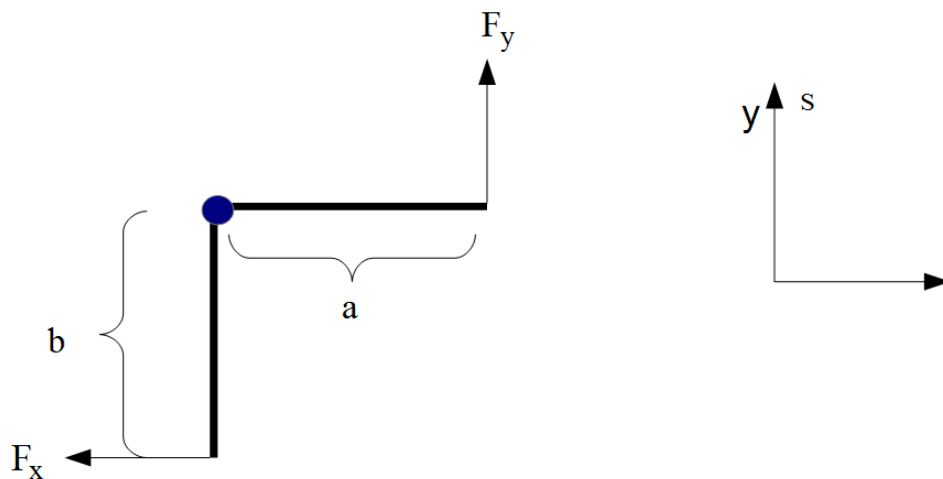


Abbildung 1.70: Skizze zum Hebel-“Paradoxon“

Ein Inertialbeobachter S' , bewege sich nun relativ zu S mit v in x -Richtung, sodass $\gamma_v = 2$. S möchte mit den bisherigen Transformationsgesetzen beschreiben, was in S'

geschieht. Er wendet zunächst die LT für die Längen der Hebelarme a und b an und stellt fest

$$a' = \frac{a}{2} \quad b' = b$$

Nun transformiert er die Kräfte unter der Berücksichtigung dass die Geschwindigkeit des Hebels $\vec{u} = 0$.

$$F'_x = F_x$$

$$F'_y = \frac{F_y}{\gamma_v} = \frac{F_y}{2}$$

Er berechnet damit das Drehmoment und erhält

$$M'_{res} = M'_x + M'_y = -F'_x b' + F'_y a' = -F_x b + \frac{F_y}{2} \frac{a}{2}$$

Wenn er dieses Ergebnis mit dem Ergebnis seines gemessenen und berechneten Drehmomentes (1.246) vergleicht, dann erhält er einen Widerspruch.

$$\Delta M'_{res}(\text{unerklärt}) = -\frac{3}{4} F_y b$$

Dieser Widerspruch lässt sich nur aufklären, wenn wir anstelle unserer Berechnung des Vorganges allein mit dem Kraftbegriff, die relativistische Leistung mit einbeziehen und ein Transformationsgesetz für das Drehmoment daraus ableiten.

Wir wollen dies im nächsten Abschnitt erledigen und kommen anschließend zur Auflösung des Hebel-“Paradoxons“ zurück.

1.22.12 Relativistisches Drehmoment und Drehimpuls in der SRT

Aufgrund der Wichtigkeit des Konzeptes des Drehmomentes, soll zunächst auf die Bedeutung dieses Begriffes genauer, auch im Kontext der klassischen Mechanik, eingegangen werden.

Das Drehmoment eines Körpers ist ein Maß für die Rotationsbewegung eines Körpers und damit auch seines Widerstands diese Rotation zu stoppen.

Im Sinne der Symmetrie-Erhaltungsgrößen-Theorie von Emmy Noether, korrespondiert die Impulserhaltung zur Verschiebungs-Symmetrie. Der Drehimpuls korrespondiert dabei zur Verdrehungssymmetrie.

Dies ist die theoretische Beschreibung der experimentellen Erkenntnis, wenn ein experimenteller Apparat um eine bestimmte Strecke verschoben und einen bestimmten Winkel verdreht wird, dass dann die Ergebnisse der Messung sich nicht verändern. Die theoretische Beschreibung trägt diesem Umstand also in diesem Zusammenhang zwischen den Symmetrien- und den Erhaltungssätzen Rechnung.

Man kann zwischen dem Eigendrehimpuls (Spin) und dem Drehimpuls um ein Zentrum unterscheiden. Ein klassischer Massepunkt, kann nur einen (Bahn)Drehimpuls besitzen, während ein Teilchenkollektiv (und in seiner Erweiterung z.B. ein starrer Körper) auch einen Eigendrehimpuls besitzen kann. Diesen bestimmt man geschickterweise gegenüber dem Massenmittelpunkt.

Mit der relativistischen Quantenmechanik kann der Spin von Elementarteilchen beschrieben werden. Dieser stellt eine zusätzliche Drehimpulskomponente im Drehimpuls-Operator dar. In jedem Fall kann der zusätzliche Spin mit dem Pauli-Lubanski Pseudovektor (axialer Vektor) beschrieben werden. Wir kommen darauf im dritten Teil des Buches genauer zu sprechen.

Im Rahmen dieses Buches wollen wir uns nicht mit Quanteneffekten beim Drehimpuls beschäftigen und erläutern die Begriffe des Drehmomentes und des Drehimpulses deshalb nur für Körper und Teilchen, die aufgrund ihrer Größe, oder ihrer Bewegung keinen Quanteneffekten unterliegen. Damit nehmen wir eine Modellanpassung vor, die in erster Näherung zu richtigen Ergebnissen führt.

Relativistisches Drehmoment

Für die Standardkonfiguration unserer Relativbewegung zwischen S und S', erhält der Inertialbeobachter in S aus (1.243), wenn $u=0$

$$\left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c}\right)' = \frac{1}{c} \frac{\partial E'}{\partial t'} = -\beta_x \cdot F_x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E'}{\partial t'} = -v_x F_x$$

Beschreibt nun der Inertialbeobachter in S ein Drehmoment als zeitliche Änderung des Drehimpulses, so gilt mit einem Hebelarm b folgendes Transformationsgesetz:

$$M'_{res} = \frac{\partial L'}{\partial t'} = b v_x \frac{\partial(\gamma_v \cdot m_0)}{\partial t'} = b \frac{\beta_x}{c} \frac{\partial E'}{\partial t'} = -b \beta_x^2 F_x$$

Wir haben hier nach dem dritten Gleichheitszeichen berücksichtigt, dass $\gamma_v m_0 = \gamma_{v'} m_0' = E/c^2 = E'/c^2$.

Wir fassen diese wichtige Erkenntnis in einer eigenen Tabelle zusammen.

Transformation des Drehmomentes

Die Inertialsysteme S und S' befinden sich in Relativbewegung mit Geschwindigkeit v in x-Richtung zueinander. Der Hebelarm b liege senkrecht zur Bewegungsrichtung

Für S	Für S'	
$M' = -b \beta_x^2 F_x = -\beta_x^2 M$	$M = b' \beta_x^2 F'_x = \beta_x^2 M'$	(1.247)

Wenden wir dies nun auf unser Hebel-“Paradoxon“ an, so sehen wir mittels (1.247) direkt, dass das transformierte Drehoment $M'=0$ sein muss, da auch $M=0$ ist.

Relativistischer Drehimpuls

Wir beginnen unsere Überlegungen bei der Newtonschen Mechanik. Der Drehimpuls ist definiert als $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. In Komponentenschreibweise lautet dies

$$L_x = yp_z - zp_y$$

$$L_y = zp_x - xp_z \tag{1.248}$$

$$L_z = xp_y - yp_x$$

Wenn wir den klassischen Impuls durch den relativistischen Impuls ersetzen, dann gilt (1.248) auch für die SRT.

Folgende physikalische Größe, welche dynamisches Massenmoment N genannt wird, spielt in der relativistischen Mechanik bei der Transformation des Drehimpulses eine größere Rolle:

$$\vec{N} = m(\vec{r} - t\vec{u}) = m\vec{r} - t\vec{p}$$

Ihre Einheit ist $\text{kg} \cdot \text{m}$. Aufgrund der Energie/Masse Äquivalenz und der Raum/Zeit Koordinatenäquivalenz, sollte sie in physikalischer Hinsicht eng verwandt sein mit der Wirkung J^* s, deren kleinster Vertreter das Plancksche Wirkungsquantum h ist. Im Hinblick auf die Quantenphysik ist in dieser Hinsicht die Quantisierung, bzw. die kleinstmögliche Größe von $\text{kg} \cdot \text{m}$ interessant.

Diese Größe N ist in der Mechanik also ein Maß für eine Geschwindigkeitsaddition des Massenmittelpunktes eines Teilchens oder Teilchenkollektives.

N ist als Vektor eine additive Größe. Für ein Teilchenkollektiv aus n Teilchen lautet die Summe

$$\sum_n \vec{N} = \sum_n (m_n (\vec{r}_n - t\vec{u}_n)) = \vec{r}_{MM} \sum_n m_n - t \sum_n m_n \vec{u}_n$$

mit dem Ortsvektor des Massenmittelpunktes

$$\vec{r}_{MM} = \frac{\sum m_n \vec{r}_n}{\sum m_n}$$

Dies zeigt, dass der Massenmittelpunkt eines geschlossenen Teilchenkollektivs, unabhängig von der Bewegung des einzelnen Teilchens. z.B. vor- und nach Zusammenstößen, sich auf einer Geraden weiterbewegt.

In unserer Formulierung der relativistischen Mechanik können wir das relativistische dynamische Massenmoment mit Hilfe des relativistischen Impulses (1.163) und der relativistischen Energie (1.165) bilden

$$\vec{N} = m(\vec{r} - t\vec{u}) = m\vec{r} - t\vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{r} - \vec{p}t = \gamma_u m_0 (\vec{r} - \vec{u}t) \quad (1.249)$$

In Komponentenschreibweise bedeutet dies

$$\begin{aligned} N_x &= mx - p_x t = \frac{E}{c^2} x - p_x t = \gamma_u m_0 (x - u_x t) \\ N_y &= my - p_y t = \frac{E}{c^2} y - p_y t = \gamma_u m_0 (y - u_y t) \\ N_z &= mz - p_z t = \frac{E}{c^2} z - p_z t = \gamma_u m_0 (z - u_z t) \end{aligned} \quad (1.250)$$

Transformation des Drehimpulses und des dynamischen Massenmomentes

Das Inertialsystem S' bewege sich in Bezug auf S mit v in x -Richtung. Ein Teilchen der Ruhemasse m_0 bewege sich in beliebige Richtung mit u bzw. u' in S bzw. S' .

Da sich der Drehimpuls im relativistischen Fall, aus dem Ortsvektor und dem relativistischen Impuls (welcher wiederum mit der relativistischen Energie zusammenhängt) zusammensetzt, benötigen wir folgende Zutaten für die Transformation des Drehimpulses:

Für S	
LT der Koordinaten	LT der Energie und des Impulses
$x' = \gamma_v (x - v_x t)$	$\frac{E'}{c} = \gamma_v \left(\frac{E}{c} - \beta_x \cdot p_x \right)$
$t' = \gamma_v \left(t - \frac{v_x x}{c^2} \right)$	$p'_x = \gamma_v \left(p_x - \beta_x \cdot \frac{E}{c} \right)$
$y' = y$ $z' = z$	$p'_{y,z} = p_{y,z}$

In S' muss für S' gelten

$$L'_x = y' p'_z - z' p'_y$$

$$L'_y = z' p'_x - x' p'_z \tag{1.251}$$

$$L'_z = x' p'_y - y' p'_x$$

Wir setzen in (1.251) nun einfach die Transformationsgesetze aus der obigen Tabelle ein und erhalten für S unter Zuhilfenahme von (1.250)

$$\begin{aligned} L'_x &= L_x \\ L'_y &= \gamma_v (L_y - v_x N_z) \\ L'_z &= \gamma_v (L_z + v_x N_y) \end{aligned}$$

Analoges Vorgehen führt uns auch auf die Transformationsformeln für das dynamische Massenmoment.

Wir fassen die Transformationsgesetze nun direkt in einer Tabelle zusammen.

Für S		Für S'		
Drehimpuls	Dynamisches Massenmoment	Drehimpuls	Dynamisches Massenmoment	(1.252)
$L'_x = L_x$	$N'_x = N_x$	$L_x = L'_x$	$N_x = N'_x$	(1.253)
$L'_y = \gamma_v (L_y - v_x N_z)$	$N'_y = \gamma_v \left(N_y + \frac{v_x}{c^2} L_z \right)$	$L_y = \gamma_v (L'_y + v_x N'_z)$	$N_y = \gamma_v \left(N'_y - \frac{v_x}{c^2} L'_z \right)$	(1.254)
$L'_z = \gamma_v (L_z + v_x N_y)$	$N'_z = \gamma_v \left(N_z - \frac{v_x}{c^2} L_y \right)$	$L_z = \gamma_v (L'_z - v_x N'_y)$	$N_z = \gamma_v \left(N'_z + \frac{v_x}{c^2} L'_y \right)$	(1.255)

Wie wir sehen werden, sind diese Transformationen analog zur Transformation des elektrischen- und magnetischen Feldes. Der Drehimpulsvektor L nimmt dabei die Rolle des elektrischen Feldvektors E ein und der Vektor des dynamischen Massenmomentes N die Rolle des magnetischen B -Feldvektors. Da jedoch der Drehimpuls ein Pseudovektor ist und die Teilchenbewegung senkrecht zu ihm stattfindet ist der Vergleich mit dem E -Vektor nicht analog und treffend anzusehen.

Die zweiten Terme von L'_y und L'_z in der Klammer können als die y- und z-Komponenten des Kreuzproduktes $\vec{v} \times \vec{N}$ angesehen werden, da $v_x=v$ und $v_y=v_z=0$.

$$v_z N_x - v_x N_z = (\vec{v} \times \vec{N})_y = -v_x N_z$$

$$v_x N_y - v_y N_x = (\vec{v} \times \vec{N})_z = v_x N_y$$

Damit erhält man eine noch kompaktere Schreibweise der Transformationsformeln, indem man die Vektoren in ihre Anteile parallel und senkrecht zur Relativbewegung mit Geschwindigkeit v aufteilt

Für S		Für S'		
Drehimpuls	Dynamisches Massenmoment	Drehimpuls	Dynamisches Massenmoment	(1.256)
$\vec{L}'_{\parallel v} = \vec{L}_{\parallel v}$	$\vec{N}'_{\parallel v} = \vec{N}_{\parallel v}$	$\vec{L}_{\parallel v} = \vec{L}'_{\parallel v}$	$\vec{N}_{\parallel v} = \vec{N}'_{\parallel v}$	(1.257)
$\vec{L}'_{\perp v} = \gamma_v (\vec{L}_{\perp v} + \vec{v} \times \vec{N})$	$\vec{N}'_{\perp v} = \gamma_v (\vec{N}_{\perp v} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{L})$	$\vec{L}_{\perp v} = \gamma_v (\vec{L}'_{\perp v} - \vec{v} \times \vec{N})$	$\vec{N}_{\perp v} = \gamma_v (\vec{N}'_{\perp v} + \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{L})$	(1.258)

Bevor wir nun zur relativistischen Beschleunigung und deren Transformation gelangen, wollen wir uns der Liste invarianter Größen der SRT unter der Lorentz-Transformation erinnern und diese ergänzen.

Invariante Größen der Speziellen Relativitätstheorie – 2

- Lichtgeschwindigkeit c
- Raum-Zeit Intervall $ds'=ds$
- Eigenzeitintervall $d\tau=ds/c$
- Anzahl der Wellenfronten die einen Raum-Zeit Punkt erreicht (Kapitel 1.18)
- Relativistische Energie-Impuls Relation: $E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$

1.22.13 Die relativistische Beschleunigung

Wie in der klassischen Mechanik, so müssen auch in der SRT, Kräfte auf ein Teilchen zur Änderung des Bewegungszustandes, also zu Beschleunigungen führen.

Bevor wir uns der strukturellen Beziehung zwischen dem relativistischen Trägheitsgesetz und der Beschleunigung zuwenden, werden wir uns zunächst mit den notwendigen Transformationsgesetzen der Beschleunigung eines Teilchens beschäftigen. Diese müssen aus den Transformationsgesetzen für Geschwindigkeiten abgeleitet werden.

Ein Inertialsystem S' bewege sich mit der konstanten Geschwindigkeit v parallel zur x -Achse zu S . In S' habe ein Massenpunkt die Geschwindigkeit u' , sowie die Beschleunigung a' . Wir leiten die Beschleunigung a die der Massenpunkt für S' in S hat, anhand des relativistischen Additionstheorems für Geschwindigkeiten (rechte Spalte in (1.106) und (1.107)) her.

Es bietet sich an die Komponenten parallel- und senkrecht zur Relativbewegung separat zu berechnen.

Beschleunigungskomponente parallel zur Relativbewegung zwischen S und S' mit Geschwindigkeit v

$$a_{//v} = \frac{\partial u_{//v}}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial u_{//v}}{\partial t'} \cdot \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial t'}} = \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{u'_{//v} + v}{1 + \frac{vu'_{//v}}{c^2}} \right) \cdot \frac{1}{\gamma_v \left(1 + \frac{vu'_{//v}}{c^2} \right)} = \frac{a'_{//v}}{\gamma_v^3 \left(1 + \frac{vu'_{//v}}{c^2} \right)^3} = \frac{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}} \cdot a'_{//v}}{\left(1 + \frac{vu'_{//v}}{c^2} \right)^3} \quad (1.259)$$

Analoges Vorgehen führt für S auf

$$a'_{//v} = \frac{a_{//v}}{\gamma_v^3 \left(1 - \frac{vu_{//v}}{c^2} \right)^3} = \frac{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}} \cdot a_{//v}}{\left(1 - \frac{vu_{//v}}{c^2} \right)^3} \quad (1.260)$$

Beschleunigungskomponente senkrecht zur Relativbewegung zwischen S und S' mit Geschwindigkeit v

In diesem Fall handelt es sich jeweils um a_y und a_z , bzw. a'_y und a'_z

Der Inertialbeobachter in S' erhält

$$a'_{\perp v} = \frac{a'_{\perp v} - \frac{v}{c^2}(a'_{\parallel v} u'_{\perp v} - a'_{\perp v} u'_{\parallel v})}{\gamma_v^2 \left(1 + \frac{vu'_{\parallel v}}{c^2}\right)^3} = \frac{(1 - \beta^2) \cdot \left(a'_{\perp v} - \frac{v}{c^2}(a'_{\parallel v} u'_{\perp v} - a'_{\perp v} u'_{\parallel v})\right)}{\left(1 + \frac{vu'_{\parallel v}}{c^2}\right)^3} \tag{1.261}$$

Der Inertialbeobachter in S erhält

$$a'_{\perp v} = \frac{a_{\perp v} - \frac{v}{c^2}(a_{\parallel v} u_{\perp v} - a_{\perp v} u_{\parallel v})}{\gamma_v^2 \left(1 - \frac{vu_{\parallel v}}{c^2}\right)^3} = \frac{(1 - \beta^2) \cdot \left(a_{\perp v} - \frac{v}{c^2}(a_{\parallel v} u_{\perp v} - a_{\perp v} u_{\parallel v})\right)}{\left(1 - \frac{vu_{\parallel v}}{c^2}\right)^3} \tag{1.262}$$

Analysiert man diese Transformationsgleichungen, dann ergeben sich Situationen die problematisch im Hinblick auf das Relativitätsprinzip werden.

Wenn sich zum Beispiel im Inertialsystem S ein Teilchen mit $a_x = \text{konstant}$ bewegt, dann lautet die Geschwindigkeit $u_x = u_{x0} + a_x t$.

Wenn sich relativ zu S nun ein Inertialbeobachter S' parallel zur x-Richtung bewegt, so erhält S anhand der Transformation (1.260) eine Beschleunigung des Teilchens in S' die nicht mehr konstant ist:

$$a'_x = \frac{a_x}{\gamma_v^3 \left(1 - \frac{(u_{x0} + a_x t)v}{c^2}\right)^3} \neq \text{konstant!}$$

Für alle folgenden Fälle gehen wir nun stets davon aus, dass das beschleunigt betrachtete Teilchen innerhalb S' in infinitesimalen Zeitabschnitten ruht ($u'=0$). Es könnte sich in einem Teilchenkollektiv also auch um das Schwerpunktsystem handeln. Wir bezeichnen dieses momentane Ruhesystem (auch MR genannt) S' mit S_τ .

Da wir es mit beschleunigten Bewegungen zu tun haben, nehmen wir Bezug auf das Kapitel 1.21 über die Beschreibung von beschleunigten Bewegungen im Minkowski Raum mittels des sog. Momentanen Ruhesystem. Die dort abgeleiteten Beziehungen betrafen vor allen Dingen den Zusammenhang zwischen der Eigenzeit des Teilchens

(auf einer mitgeführten Uhr) $dt'=d\tau$ und dem Raum-Zeit-Intervall. Wir erinnern uns nochmal der dort hergeleiteten Beziehungen.

Das momentane Ruhesystem ist das momentan gültige Inertialsystem auf der Weltlinie des Teilchens selbst, in dem dieses ruht. Jedes dieser momentanen Ruhesysteme existiert nur für infinitesimale Zeit dt , deshalb gibt es bei beschleunigter Bewegung unendlich viele momentane Ruhesysteme auf der Weltlinie des Teilchens. Die Relativbewegung der Inertialsysteme ist zeitabhängig $v=v(t)$. Es gilt zwar $u'=0$, aber trotzdem $a' \neq 0$.

Man bezeichnet die Beschleunigung im momentanen Ruhesystem $S' = S_\tau$ auch als Eigenbeschleunigung

$$\vec{a}' := \vec{a}_\tau \quad (1.263)$$

Beispiel: Eine Rakete mit konstanter Schubkraft (gemessen in der Rakete) hat eine konstante Eigenbeschleunigung a_τ .

Die Transformationsgleichungen (1.259) – (1.262) vereinfachen sich dann mit $u'=0$ und $u=v$ wie folgt

Für S	Für S'	
$a'_{//u} = a_{\tau//} = \gamma_{u(t)}^3 \cdot a_{//u} = (1 - \beta^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot a_{//u}$	$a_{//u} = \gamma_{u(t)}^{-3} \cdot a'_{//u} = (1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}} \cdot a'_{//u}$	(1.264)
$a'_{\perp u} = a_{\tau\perp} = \gamma_{u(t)}^2 \cdot a_{\perp u} = (1 - \beta^2)^{-1} \cdot a_{\perp u}$	$a_{\perp u} = \gamma_{u(t)}^{-2} \cdot a'_{\perp u} = (1 - \beta^2) \cdot a'_{\perp u}$	(1.265)

In der klassischen Mechanik ist die Beschleunigung in allen Inertialsystemen gleich. Wie wir nun sehen, ist dies bei hohen Geschwindigkeiten nicht mehr der Fall.

Wir wollen nun den Zusammenhang mit dem relativistischen Kraftgesetz (1.235) ausarbeiten.

Dieses Kraftgesetz gilt nur im Laborsystem S, in dem man für die Geschwindigkeit des Teilchens $v=u$ misst. Es ist nicht invariant unter der Lorentz-Transformation.

Wenn man die Kraft parallel- und senkrecht zur vorhandenen Geschwindigkeit aufteilt dann gilt in S

$$\vec{F}_{//u} = \gamma_u^3 \cdot m_0 \vec{a}_{//u} \tag{1.266}$$

$$\vec{F}_{\perp u} = \gamma_u \cdot m_0 \vec{a}_{\perp u} \tag{1.267}$$

Andererseits erhält ein Inertialbeobachter in S aus den Transformationsgesetzen für die Beschleunigung (linke Spalte in (1.264) und (1.265)), wenn er diese mit der Ruhemasse m_0 multipliziert, die Kräfte F' (in $S' = S_\tau$). Denn in $S' = S_\tau$ ist ja nur die Ruhemasse wirksam.

$$\vec{F}'_{//u} = m_0 a'_{//u} = m_0 \gamma_{u(t)}^3 a_{//u} \tag{1.268}$$

$$\vec{F}'_{\perp u} = m_0 a'_{\perp u} = m_0 \gamma_{u(t)}^2 a_{\perp u} \tag{1.269}$$

Der Vergleich zwischen (1.266) und (1.268) und zwischen (1.267) und (1.269) führt uns wieder auf die Transformationsgesetze für die Kraft, wie wir sie bereits aus einem allgemeineren Ansatz in Abschnitt 1.22.12 hergeleitet haben (1.244)

Für S	Für S'	
$F'_{//u} = F_{//u}$	$F_{//u} = F'_{//u}$	(1.270)
$F'_{\perp u} = \gamma_u F_{\perp u}$	$F_{\perp u} = \gamma_u^{-1} F'_{\perp u}$	(1.271)

Damit es zu keinen Missverständnissen kommt, sei noch darauf hingewiesen, dass im momentanen Ruhesystem des Teilchens $S'=S_\tau$ nur seine Ruhemasse m_0 wirksam ist. Aufgrund des Relativitätsprinzips muss deshalb in $S'=S_\tau$ gelten

$$F'_{//u} = m_0 a'_{//u}$$

$$F'_{\perp u} = m_0 a'_{\perp u}$$

Bezüglich der Beschleunigung eines Teilchens in S und im MR des Teilchens $S' = S_\tau$ und in einem beliebigen anderen Inertialsystem S'' gilt stets die vektorielle Summe

$$\vec{a}' = \vec{a}_\tau = \gamma_u^3 \vec{a}_{//u} + \gamma_u^2 \vec{a}_{\perp u} = \gamma_{u''}^3 \vec{a}'_{//u''} + \gamma_{u''}^2 \vec{a}'_{\perp u''} \quad (1.272)$$

1.22.14 Der relativistische Raketenflug

Wir verwenden weiterhin das Konzept des mitbewegten momentanen Ruhesystems (MR $S'=S_\tau$) eines Körpers (Teilchens) auf der Weltlinie zwischen A und B. Das Teilchen selbst beschreibt also von S aus betrachtet in infinitesimalen Zeitabschnitten stets neue Inertialsysteme die sich jedes für sich im infinitesimalen Zeitabschnitt gleichförmig bewegen.

Man kann sich das veranschaulichen (siehe Abbildung 1.71), wenn man sich die Eichhyperbel im Bild (blaue Kurve), zwischen dem Lichtkegel (orange), als Bahn eines Teilchens vorstellt, das zur Zeit $t=0$ am Ort $x=1Ls$ startet und sich beschleunigt in x -Richtung entfernt. Es durchläuft dabei also die verschiedenen Inertialsysteme. Man nennt diese dann die momentanen Ruhesysteme des Teilchens.

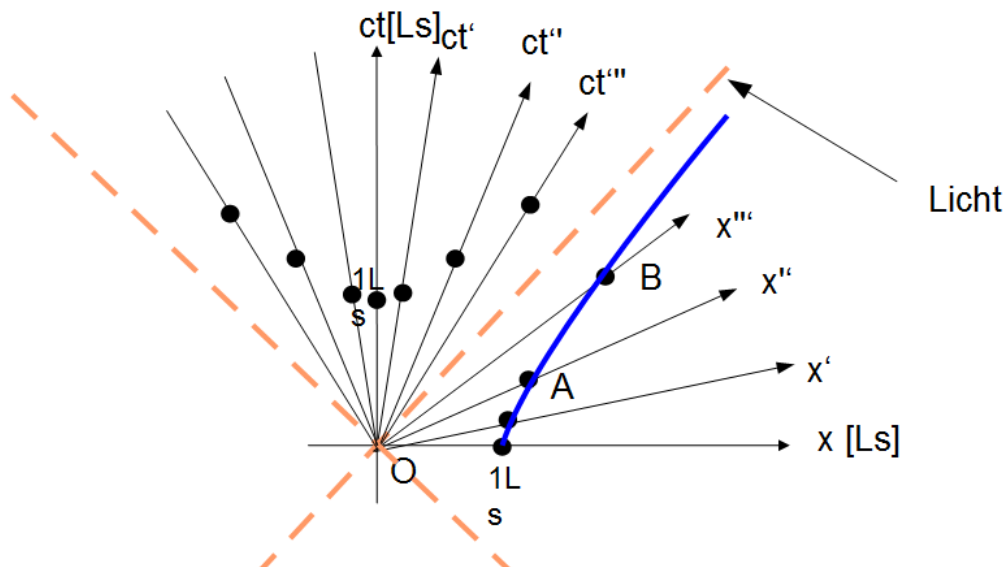


Abbildung 1.71: Weltlinie eines Teilchens mit beschleunigter Bewegung

Wir wollen nun die in Abschnitt 1.21 und 1.22.14 erarbeiteten Gesetzmäßigkeiten auf einen linear beschleunigten Flug mit einer Rakete anwenden. Wir wollen hierbei den gesamten Vorgang relativistisch berechnen.

Wir haben gesehen, dass sowohl Kräfte, als auch Beschleunigungen sich im relativistischen Fall anders verhalten als wir es in der klassischen Mechanik gewohnt sind. Wir haben auch gesehen, dass die Zeit in verschiedenen Inertialsystemen verschieden gemessen wird. Wir wollen nun unsere Kenntnisse auf die beschleunigte Bewegung einer Rakete anwenden.

Da die Rakete einen starren Körper darstellt und wir die Bewegung in nur einer Richtung betrachten wollen, dürfen wir die gesamte Rakete durch eine Punktmasse (Masse der Rakete) im Schwerpunkt ersetzt, beschreiben. In diesen Schwerpunkt legen wir dann die momentanen Ruhesystem (MR) die die Rakete während ihres beschleunigten Fluges „durchläuft“ (Abbildung 1.72). Diese sind gegenüber dem Schwerpunkt stets in Ruhe.

Da wir annehmen, dass die Schubkraft der Rakete stets parallel zur Geschwindigkeit gerichtet ist, erhält man das Transformationsgesetz für die relativistische Beschleunigung vom Boden (S) und der Rakete (MR $S'=S_\tau$) mit (1.264). Wir bezeichnen die Beschleunigung der Rakete im MR $S'=S_\tau$ mit der Eigenbeschleunigung $a'=a_\tau$

$$a_\tau = \gamma_{u(t)}^3 a \quad (1.273)$$

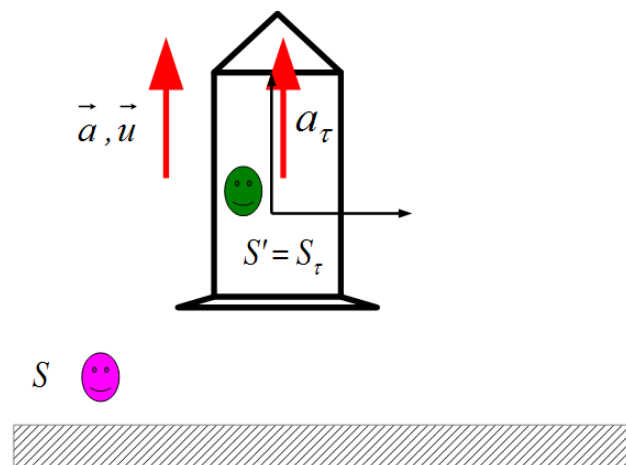


Abbildung 1.72: Skizze zum relativistischen Raketenflug

Die Geschwindigkeit $u(t)$ der beschleunigten „relativistischen“ Rakete

Wir wollen nun die Geschwindigkeit der Rakete in Abhängigkeit von der Zeit t ermitteln, so wie wir sie messen würden, wenn wir „Mission Control“ im Inertialsystem S wären. Nach Newton ergäbe sich einfach $u=a \cdot t$. Wir gehen nun davon aus, dass die Eigenbeschleunigung konstant ist in S und folgern aus (1.273)

$$\int \frac{du}{\left(1 - \frac{u(t)^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \int a_\tau dt \quad (1.274)$$

Wir können das Integral auflösen und erhalten

$$\frac{u(t)}{\left(1 - \frac{u(t)^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = a_\tau t$$

Wir müssen diese Gleichung nach $u(t)$ auflösen und bilden dazu zunächst $u(t)^2$

$$u(t)^2 = a_\tau t \left(1 - \frac{u(t)^2}{c^2}\right)$$

Es folgt also für die Geschwindigkeit der Rakete bei konstanter Eigenbeschleunigung

$$u(t) = \frac{a_\tau t}{\sqrt{1 + \frac{a_\tau^2 t^2}{c^2}}} \quad (1.275)$$

Es ergibt sich also keineswegs ein linearer Zusammenhang $u=a \cdot t$ wie es in der klassischen Mechanik der Fall ist. Der relativistisch gewonnene Ausdruck für $u(t)$ resultiert aus der Tatsache, dass kein materieller Körper die Lichtgeschwindigkeit erreichen kann.

Die folgende Abbildung (1.73) zeigt den Geschwindigkeitsanstieg der Rakete in Abhängigkeit von der Zeit, wenn sie konstant mit $a_\tau = 20\text{m/s}^2$ beschleunigt.

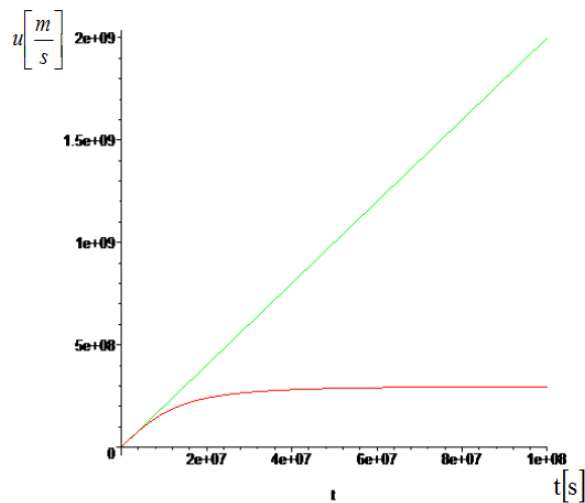


Abbildung 1.73: u-t-Diagramm zum relativistischen Raketenflug mit konstanter Eigenbeschleunigung $a_\tau = 20\text{m/s}^2$

Die rote Kurve zeigt den Anstieg der Geschwindigkeit bei konstanter Eigenbeschleunigung. Man sieht sehr schön, dass die Rakete die Lichtgeschwindigkeit (ca. $3 \cdot 10^8$ m/s) nur asymptotisch erreichen kann.

Die grüne Gerade zeigt im Vergleich dazu den Anstieg der Geschwindigkeit gemäß der Newtonschen Mechanik.

Die Wegstrecke $x(t)$ der beschleunigten „relativistischen“ Rakete

Um den zurückgelegten Weg der Rakete als Funktion der Zeit zu berechnen, müssen wir die Funktion für die Geschwindigkeit $u(t)$ integrieren:

$$x(t) = \int_0^t u(t) dt = \int_0^t \frac{a_\tau t}{\sqrt{1 + \frac{a_\tau^2 t^2}{c^2}}} dt = \frac{c^2}{a_\tau} \left(\sqrt{1 + \frac{a_\tau^2 t^2}{c^2}} - 1 \right) = c \sqrt{\frac{c^2}{a_\tau^2} + t^2} + x_0 \quad (1.276)$$

Abbildung 1.74 zeigt das x-t-Diagramm bei der angenommenen konstanten Eigenbeschleunigung von $a_\tau = 20\text{m/s}^2$.

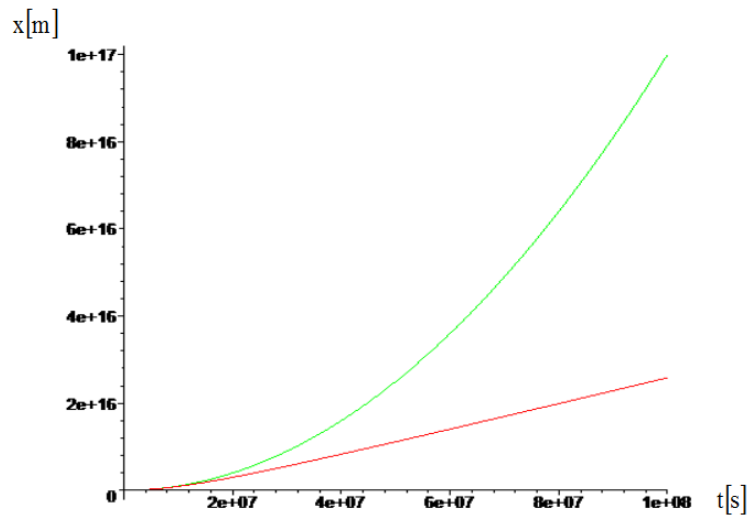


Abbildung 1.74: x-t-Diagramm zum relativistischen Raketenflug mit konstanter Eigenbeschleunigung $a_\tau = 20\text{m/s}^2$

Die rote Kurve zeigt den Zuwachs der Wegstrecke gemäß SRT. Die grüne Kurve den Wegstreckenzuwachs nach der klassischen Mechanik.

Wenn man wissen will, wann sich die Rakete an einem bestimmten Ort x befindet, dann muss man Formel (1.276) nach t auflösen.

$$t(x) = \frac{1}{c} \sqrt{x \left(x + \frac{2c^2}{a_\tau} \right)} \tag{1.277}$$

Die Eigenzeit in der beschleunigten „relativistischen“ Rakete

Innerhalb der relativistischen Rakete (MR $S'=S_\tau$) ist der Verlauf der Zeit ein anderer als der Zeitverlauf in „Mission Control“ (Inertialsystem S). Innerhalb der Rakete wird an einem Ort stets die Eigenzeit τ gemessen. Wir wollen also feststellen wie sich die Eigenzeit als Funktion der Zeit t berechnen lässt.

Dazu formen wir Formel (1.275) etwas um

$$\frac{1}{1 - \frac{u(t)^2}{c^2}} = 1 + \frac{a_\tau^2 t^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{u(t)^2}{c^2} = \frac{1}{1 + \frac{a_\tau^2 t^2}{c^2}} \quad (1.278)$$

Wir berechnen die Eigenzeit nun anhand Formel (1.146), indem wir (1.278) einsetzen und das Integral berechnen.

$$\tau(t) = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 - \beta(t)^2} dt = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 - \frac{u(t)^2}{c^2}} dt = \int_0^t \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{a_\tau^2 t^2}{c^2}}} dt = \frac{c}{a_\tau} \ln \left(\frac{a_\tau t}{c} + \sqrt{1 + \frac{a_\tau^2 t^2}{c^2}} \right) = \frac{c}{a_\tau} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{a_\tau t}{c} \right) \quad (1.279)$$

Die Eigenzeit innerhalb der relativistischen Rakete fließt also langsamer als die Zeit t in der Kontrollstation auf der Erde. In einigen Jahren Eigenzeit kommt man also sehr weit.

Für den folgenden Abschnitt ist es noch interessant den Funktionsverlauf von $\tau(\beta)$ zu kennen.

$$\tau(\beta(t)) = \frac{c}{2a_\tau} \ln \left(\frac{1 + \beta(t)}{1 - \beta(t)} \right) \quad (1.280)$$

Die zurückgelegte Wegstrecke x der Rakete, in Abhängigkeit von der Eigenzeit lautet

$$x(\tau) = \frac{c^2}{a_\tau} \left(-1 + \cosh \frac{a_\tau \tau}{c} \right) \quad (1.281)$$

Die Zeit t , die auf der Erde vergeht, lautet in Abhängigkeit von der Eigenzeit innerhalb der Rakete

$$t(\tau) = \frac{c}{2a_\tau} \left(e^{\frac{a_\tau \tau}{c}} - e^{-\frac{a_\tau \tau}{c}} \right) = \frac{c}{a_\tau} \sinh \frac{a_\tau \tau}{c} \quad (1.282)$$

Wir können (1.282) nutzen um es auf das Zwillingsparadoxon anzuwenden und eine exaktere Lösung anzugeben.

Auflösung des Zwillingsparadoxon im Rahmen der SRT

Einer der Zwillinge, Martin, reise 5 Jahre in seiner Eigenzeit gemessen, mit der Eigenbeschleunigung $a_\tau=9,81\text{m/s}^2$ in x -Richtung, dann 10 Jahre mit $-a_\tau$, dann wieder 5 Jahre mit $+a_\tau$. D.h. Er kehrt nach 20 Jahren in seiner Eigenzeit zur Erde zurück. Für den Zwilling Hans, der auf der Erde geblieben ist (S wird als Inertialsystem angenommen), ergibt sich mit (1.282):

$$t(\tau=5 \text{ Jahre}) = 84,4 \text{ Jahre}$$

Martin kehrt für ihn also erst nach $4 \cdot t(\tau=5 \text{ Jahre})=337,4$ Jahre zur Erde zurück.

Dies ist ein weitaus genaueres Ergebnis als wir es in Abschnitt 1.14 erhalten haben.

Unberücksichtigt geblieben sind aber die Effekte auf die Raum-Zeit, die durch Massen/Energien entstehen. Diese sind Gegenstand der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Wir kommen im vierten Teil des Buches darauf zu sprechen.

Weltlinie der beschleunigten „relativistischen“ Rakete

Das Raum-Zeit-Intervall ist eine Invariante. Im Falle einer Bewegung in x -Richtung gilt

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t(x)^2 - \Delta x^2$$

Um dies für den konstant beschleunigten Körper zu erhalten, nutzen wir $t(x)$ (1.277), multiplizieren die Gleichung mit c und quadrieren

$$c^2 t(x)^2 = x \left(x + \frac{2c^2}{a_\tau} \right)$$

Für x setzen wir $\Delta x=x-x_0$ ein und erhalten

$$c^2 t(\Delta x)^2 = c^2 \Delta t^2 = (x - x_0)^2 + 2(x - x_0) \frac{c^2}{a_\tau}$$

Hier kommen wir weiter, indem wir quadratisch ergänzen. Dann erhalten wir die Gleichung der Weltlinie des konstant beschleunigten Körpers (hier Rakete)

$$c^2 \Delta t^2 = (x - x_0)^2 + 2(x - x_0) \frac{c^2}{a_\tau} = \left((x - x_0) + \frac{c^2}{a_\tau} \right)^2 - \frac{c^4}{a_\tau^2} \quad (1.283)$$

Diese Gleichung stellt im Allgemeinen Fall einen Hyperboloid dar. In der ct-x-Ebene ist es eine Hyperbel. Die Asymptoten lauten

$$x - x_0 + \frac{c^2}{a_\tau} = \pm ct \quad (1.284)$$

Die Asymptote +ct, kann als die Weltlinie eines Photons interpretiert werden, das bei

$$x - x_0 = -\frac{c^2}{a_\tau} ,$$

zur Zeit t=0 in x-Richtung startet.

Abbildung 1.75 zeigt die Weltlinie eines konstant beschleunigten starren Körpers (z.B. Rakete) im Minkowski-Diagramm, sowie die Asymptote +ct, welche die Weltlinie eines Photons darstellt.

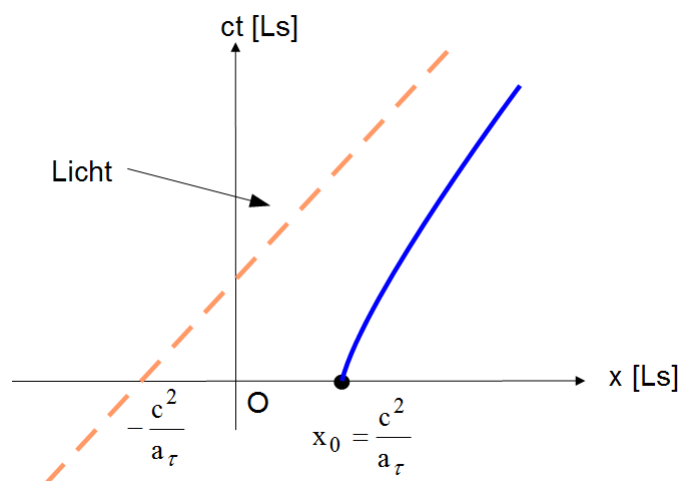


Abbildung 1.75: Weltlinie (blau) eines konstant beschleunigten Körpers (z.B. Rakete) mit konstanter Eigenbeschleunigung $a_\tau = 20\text{m/s}^2$

1.22.15 Die relativistische Raketengleichung

Wir wollen uns nun im Detail mit der Physik von Raketen beschäftigen. Wir werden dabei hauptsächlich die Frage beantworten, wie schnell eine Rakete werden kann. Im Falle von treibstoffbetriebenen Raketen, könnte man zunächst vermuten, dass dies aufgrund chemischer Verbrennungsprozesses, nicht allein anhand physikalischer Formeln berechnet werden kann. Dies ist jedoch falsch, da das Grundprinzip des treibstoffbetriebenen Raketenantriebes auf dem rein physikalischen Rückstoßprinzip basiert. Der Rückstoß wird dabei durch den Ausstoß der Verbrennungsgase erzeugt. Damit wird die Berechnung der Geschwindigkeit der Rakete anhand des Impuls- und Energieerhaltungssatzes möglich.

Wir werden zunächst den Vorgang aus Sicht der klassischen Physik untersuchen und gelangen so zur klassischen Raketengleichung. Erst im Anschluss wenden wir die Erkenntnisse der SRT auf die Rakete an, um zur relativistischen Raketengleichung zu gelangen.

Zum Abschluss beschäftigen wir uns mit einer weiteren Form des Raketenantriebes, der durch Teilchen-Antiteilchen Zerstrahlung realisiert werden kann.

In Abbildung 1.76 sind schematisch die wichtigsten physikalischen Größen zur Berechnung der Geschwindigkeit der Rakete v_R dargestellt.

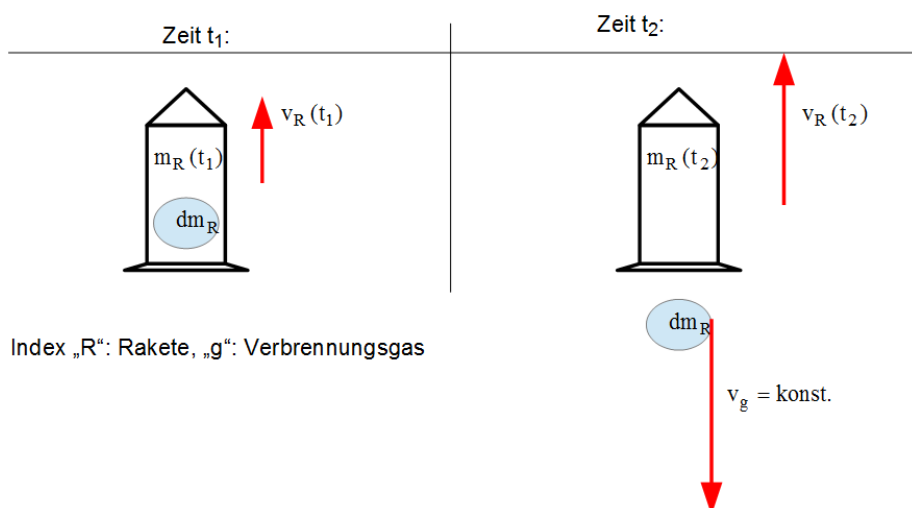


Abbildung 1.76: Schematische Darstellung zum Rückstoßprinzip beim Raketenantrieb

Klassische Raketengleichung

Der Impulserhaltungssatz setzt die Summe der Impulse innerhalb eines physikalischen Systemes, zu einem Zeitpunkt t_1 , mit der Summe der Impulse zu einem Zeitpunkt t_2 gemäß (1.15) in Beziehung zueinander.

Unser physikalisches System besteht hierbei aus folgenden physikalischen Größen:

- Masse der Rakete m_R (Rakete + Besatzung + Treibstoff)
- Geschwindigkeit der Rakete v_R
- Geschwindigkeit der Verbrennungsgase v_g (konstant)
- Leergewicht der Rakete m_{leer} (Rakete + Besatzung) nachdem der Brennstoff vollständig verbraucht ist

Wir nutzen die Näherung, dass die Geschwindigkeit der ausgestoßenen Verbrennungsgase konstant ist und vernachlässigen die Luftreibung beim Flug der Rakete vollständig.

Wir wollen den Geschwindigkeitsverlauf der Rakete berechnen. Wir wenden den Impulserhaltungssatz auf den abgebildeten Vorgang in Abb. 1.76 an und erhalten

$$m_R(t_1)v_R(t_1) = m_R(t_2)v_R(t_2) - dm_R \cdot v_g \quad (1.285)$$

Wenn wir im Rahmen einer Grenzwertbildung, $t_2 - t_1 = \Delta t$ gegen Null gehen lassen, dann gilt die Näherung

$$m_R(t_1) = m_R(t_2)$$

und man erhält aus (1.284)

$$m_R(t_1)v_R(t_1) = m_R(t_1)v_R(t_2) - dm_R \cdot v_g \quad (1.286)$$

Wir können diese Gleichung nach der Änderung der Geschwindigkeit der Rakete auflösen

$$v_R(t_2) - v_R(t_1) = \frac{dm_R \cdot v_g}{m_R}$$

Da wir Δt gegen Null gehen lassen, erhalten wir eine differentielle Geschwindigkeitsänderung

$$dv_R = \frac{dm_R}{m_R} \cdot v_g \quad (1.287)$$

Dies ist eine Differentialgleichung und kann integriert werden, wenn man die Anfangsbedingungen festlegt. Wir gehen von folgenden Startbedingungen aus:

- m_{R0} ist das Startgewicht der Rakete (Rakete + Besatzung + Treibstoff) zum Zeitpunkt $t=0$
- $v_{R0}=0$ ist die Anfangsgeschwindigkeit der Rakete zum Zeitpunkt $t=0$

Wir erhalten mit (1.287) folgende Integralgleichung

$$\int_{v_R=v_0=0}^{v_R(t)} dv_R = v_g \cdot \int_{m_0}^{m(t)} \frac{1}{m_R} dm_R$$

Dies ergibt folgende Lösung, wenn wir das erdnahe Schwerfeld mit Erdbeschleunigung g berücksichtigen

$$\boxed{v_R(t) = v_g \ln\left(\frac{m_{R0}}{m_R(t)}\right) - gt = v_g \ln\left(\frac{m_{R0}}{m_{R0} - \dot{m}_R \cdot t}\right) - gt} \quad (1.288)$$

Diese Gleichung wird auch als klassische Raketengleichung bezeichnet.

Die Maximalgeschwindigkeit erreicht die Rakete zu der Zeit $t=t_B$, wenn der gesamte Treibstoff verbraucht ist. Die Rakete hat dann nur noch ihr Leergewicht m_{leer} :

$$v_R(t = t_B) = v_{Rmax} = v_g \ln\left(\frac{m_{R0}}{m_R(t = t_B)}\right) - gt = v_g \ln\left(\frac{m_{R0}}{m_{Rleer}}\right) - gt_B \quad (1.289)$$

Relativistische Raketengleichung

Die relativistische Betrachtung ist vor allem dann interessant, wenn die Geschwindigkeiten v_R und v_g in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit liegen (ca. 20%) und der Lorentz-Faktor nicht mehr vernachlässigt werden kann.

Der Impulserhaltungssatz aus Sicht der Rakete (MR $S'=S_\tau$), wird eine ähnliche Form haben, wie im Fall der klassischen Mechanik. Wir betrachten dazu die Situation vor dem Ausstoßen der Verbrennungsgase τ_1 aus Sicht der Rakete und zu einem differentiell größeren Zeitpunkt τ_2 . Danach müssen wir den Vorgang zurück nach S transformieren um die relativistische Raketengleichung aus Sicht der Erde berechnen zu können.

Impulserhaltungssatz im Ruhesystem (Schwerpunktsystem) der Rakete (MR $S'=S_\tau$)

Der Impulserhaltungssatz im relativistischen Fall im Schwerpunktsystem, ergibt sich deshalb analog zum Fall in der klassischen Mechanik. Die Massen entsprechen den Ruhemassen im momentanen Ruhesystem

$$m_R(\tau_1)v'_R(\tau_1) = m_R(\tau_2)v'_R(\tau_2) - dm_R(\tau) \cdot v_g \quad (1.290)$$

Daraus folgt aufgrund $v_R(\tau_2) - v_R(\tau_1) = dv_R$

$$m_R(\tau)dv'_R(\tau) = -dm_R(\tau) \cdot v_g \quad (1.291)$$

Wir bilden den Differentialquotient mit der Eigenzeit

$$m_R(\tau) \frac{\partial v'_R(\tau)}{\partial \tau} = - \frac{\partial m_R(\tau)}{\partial \tau} \cdot v_g \quad (1.292)$$

Wenn wir die Gleichung durch m_R dividieren, dann erhalten wir direkt den Ausdruck für die Eigenbeschleunigung

$$a_\tau = \frac{\partial v'_R(\tau)}{\partial \tau} = - \frac{v_g}{m_R(\tau)} \frac{\partial m_R(\tau)}{\partial \tau} \quad (1.293)$$

Daraus erhält man dann analog (1.287)

$$\frac{dm_R(\tau)}{m_R(\tau)} = -\frac{a_\tau}{v_g} d\tau \tag{1.294}$$

Die Lösung erfolgt ebenfalls wie in (1.288) durch Integration

$$\ln\left(\frac{m_R(\tau)}{m_{R0}}\right) = -\frac{a_\tau}{v_g} \tau \tag{1.295}$$

Nun transformieren wir das Ganze zurück um eine Aussage in S zu erhalten. Mit (1.280) haben wir bereits die Transformation der Eigenzeit gelöst.

Dies setzen wir in (1.295) ein und lösen folgendermaßen nach dem zeitabhängigen Verhältnis der Massen auf

$$\ln\left(\frac{m_R(t)}{m_{R0}}\right) = -\frac{a_\tau}{v_g} \frac{c}{2a_\tau} \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) = -\frac{c}{2v_g} \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) \tag{1.296}$$

Und damit ergibt sich die relativistische Raketengleichung

$$\boxed{\frac{m_{R0}}{m_R(t)} = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{c}{2v_g}} = \left(\frac{1 + \frac{v_R(t)}{c}}{1 - \frac{v_R(t)}{c}}\right)^{\frac{c}{2v_g}} \tag{1.297}$$

Diese Gleichung klärt u.a. die Frage, welches Verhältnis von Startgewicht m_0 zu Leergewicht m_{leer} vorhanden sein muss, damit eine bestimmte Geschwindigkeit der Rakete v_R erreicht werden kann.

Relativistische Rakete mit Photonenantrieb

Die Energie für den Antrieb kann jedoch nicht nur aus chemischen Verbrennungsprozessen entstehen, sondern z.B. auch aus der Zerstrahlung von Materie mit Antimaterie.

In Abschnitt 1.22.10 haben wir uns die Vernichtung von Elektron und Positron genauer angesehen und festgestellt dass dabei 2 Photonen mit je 0,511MeV entstehen.

Bei genügend Materie- und Antimaterie kann also genügend Energie für den Antrieb einer Rakete entstehen.

Vom Ruhesystem S (Erde) aus, hat die Rakete den Impuls

$$p = \gamma_R m_R v_R \quad (1.298)$$

Hierbei ist m_R die Ruhemasse der Rakete. Der Impuls der Rakete ändert sich zum einen relativistisch mit der Geschwindigkeit und zum anderen aufgrund des Antriebes selbst, der einen Rückstoß erzeugt. Dieser Rückstoß muss in der Verringerung der Ruhemasse berücksichtigt werden, welcher im Fall des Photonenantriebs (z.B. Materie-Antimaterie) nur aus der Zerstrahlung von Ruhemasse kommen kann

$$\frac{\partial p_R}{\partial t} = \frac{\partial(\gamma_R m_R v_R)}{\partial t} = \frac{\partial m_R}{\partial t} (\gamma_R v_R) + m_R \frac{\partial(\gamma_R v_R)}{\partial t} \quad (1.299)$$

Wir nutzen folgende Näherung für die Ableitung des Produktes aus Lorentz-Faktor und Geschwindigkeit der Rakete

$$\frac{\partial(\gamma_R v_R)}{\partial t} \approx \gamma_R^3 \cdot \dot{v}_R$$

und erhalten

$$\frac{\partial p_R}{\partial t} = \frac{\partial m_R}{\partial t} (\gamma_R v_R) + m_R \cdot \gamma_R^3 \cdot a_R$$

Bei a_R handelt es sich um die lineare Beschleunigung der Rakete im System der Erde S. Aus dem Transformationsgesetz für die Beschleunigung (1.273), sieht man, dass das letzte Produkt die Eigenbeschleunigung darstellt

$$\frac{\partial p_R}{\partial t} = \dot{m}_R \gamma_R v_R + m_R \cdot a_\tau \quad (1.300)$$

Die relativistische Ruhemassenänderung der Rakete $-dm_R$ (wobei $dm_R < 0$), erzeugt den Photonenimpuls $-dm_R \cdot (-c)$ nach unten.

Dies gilt jedoch nur im Ruhesystem der Rakete, in der die Photonen entstehen. Die Energie der Photonen im Inertialsystem der Erde S, kann anhand der Doppler-Formel (1.122) berechnet werden

$$f = f' \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = f' \sqrt{\frac{c-v_R}{c+v_R}} \quad (1.301)$$

Damit ergibt sich mit dem Korrekturfaktor f/f' , die differentielle Impulsänderung der Rakete aufgrund des Photonenrückstoßes im Erdsystem S

$$dp_{R_ph} = c dm_R \frac{f}{f'} = c dm_R \sqrt{\frac{c-v_R}{c+v_R}} \quad (1.302)$$

Und somit für den Differentialquotient

$$\frac{\partial p_{R_ph}}{\partial t} = c \dot{m}_R \sqrt{\frac{c-v_R}{c+v_R}} \quad (1.303)$$

Nun können wir den Impulserhaltungssatz mit (1.300) und (1.303) anwenden

$$\frac{\partial p_R}{\partial t} = -\frac{\partial p_{Ph}}{\partial t} = \dot{m}_R \gamma_R v_R + m_R \cdot a_\tau = -c \dot{m}_R \sqrt{\frac{c-v_R}{c+v_R}} \quad (1.304)$$

Dies kann einfach umgeformt werden

$$\dot{m}_R = -\frac{m_R \cdot a_\tau}{c} \sqrt{1-\beta^2}$$

Wir ersetzen die Ableitungen durch Differentiale

$$\frac{dm_R}{m_R} = -\frac{a_\tau}{c} \sqrt{1-\beta^2} dt \quad (1.305)$$

Aus der Transformationsformel (1.273) für Beschleunigungen zurück ins Erdsystem S folgt andererseits

$$dt = \gamma_R^3 \frac{dv_R}{a_\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{dv_R}{a_\tau}$$

Wir setzen das in (1.305) ein

$$\frac{dm_R}{m_R} = -\gamma_R^2 \frac{dv_R}{c} = -\frac{dv_R}{c(1-\beta^2)} = -\frac{d\beta}{1-\beta^2}$$

Hieraus folgt die Raketengleichung im Inertialsystem der Erde S bei Photonenantrieb aufgrund von Materie-Antimaterie Annihilation

$$\ln \frac{m_R(t)}{m_{R0}} = \ln \left(\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \right)$$

Und damit

$$\boxed{\frac{m_{R0}}{m_R(t)} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{v_R(t)}{c}}{1 - \frac{v_R(t)}{c}}} \quad (1.306)}$$

1.23 Relativistische Elektrodynamik 1

In allen bisherigen Experimenten hat sich bestätigt, dass es kein Experiment erlaubt, festzustellen, ob sich die Versuchsapparatur gleichförmig bewegt, wenn diese ein abgeschlossenes System darstellt oder ob sie ruht. Ein Beobachter innerhalb eines abgeschlossenen Inertialsystems kann also nicht feststellen ob er sich bewegt oder ruht. Das dahinterliegende Prinzip wird als Relativitätsprinzip bezeichnet. Aus diesem Grund muss es möglich sein, dass physikalische Größen zwischen Inertialsystemen so umgerechnet werden können, dass dieses Prinzip auch in der Umrechnung physikalischer Größen stets erfüllt ist. Aus den Axiomen der SRT ergeben sich daraus die fundamentalen Transformationsgesetze der Raum- und Zeitkoordinaten, welche wir als die Lorentz-Transformationen identifiziert haben. Die physikalisch-mathematische Bedingung, die die Erfüllung des Relativitätsprinzips beschreibt, ist dann die Invarianz physikalischer Gesetze wenn Sie einer Lorentz-Transformation unterworfen werden. Die Ergebnisse der Rechnungen entsprechen dann den physikalischen Messergebnissen in den jeweiligen Inertialsystemen. Wir werden in den nächsten Abschnitten das Relativitätsprinzip und seine Forderung der Invarianz der elektromagnetischen Felder unter der Lorentz-Transformation anwenden und werden sehen, dass die Feldstärken bei der Umrechnung auf andere Inertialsysteme modifiziert werden müssen, damit sie das Relativitätsprinzip erfüllen und somit korrekte Umrechnungen zwischen den physikalischen Größen erlauben.

Zunächst wollen wir uns noch nicht mit den Transformationsformeln beschäftigen, sondern an konkreten Beispielen jeweils innerhalb nur eines Inertialsystems die geltenden Gesetzmäßigkeiten der Elektrodynamik erproben und nur die Forderungen an die Transformationsformeln anhand des experimentell bestätigten Relativitätsprinzips zum Ausdruck bringen. Dies ermöglicht eine anschauliche problemorientierte Herleitung der Umsetzung des speziell relativistischen Relativitätsprinzips in der Elektrodynamik.

1.23.1 Lorentz-Kraft und Newtonsche Relativität der elektromagnetischen Felder

Seit Hendrik Anton Lorentz, weiß man, dass eine mit Geschwindigkeit v bewegte Ladung q in einem allgemein überlagerten elektrischen- und magnetischen Feld eine Kraftwirkung erfährt, deren Stärke gemäß (1.307) berechnet werden kann

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.307)$$

Wir geben diese Gleichung hier als phänomenologische Gleichung an. Im weiteren Verlauf des Kapitels 1.23, werden wir zeigen, wie die Lorentz-Kraft aus der Speziellen Relativitätstheorie abgeleitet werden kann.

Bereits zu Maxwells- und Lorentz Zeit, war bekannt, dass es einen Zusammenhang zwischen elektrischer- und magnetischer Kraft geben muss. Dazu stellen wir uns folgendes Gedankenexperiment vor: Zwei Inertialsysteme bewegen sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit v in x -Richtung. Das Inertialsystem S wird, völlig gleichberechtigt, zu S' , zunächst als ruhend angenommen. Relativ zu S' befindet sich eine Feldladung Q am Ort $\vec{r}' = \text{const.}$ und in ebenfalls konstanter Entfernung dazu, eine in S' ruhende Probeladung (Abbildung 1.77).

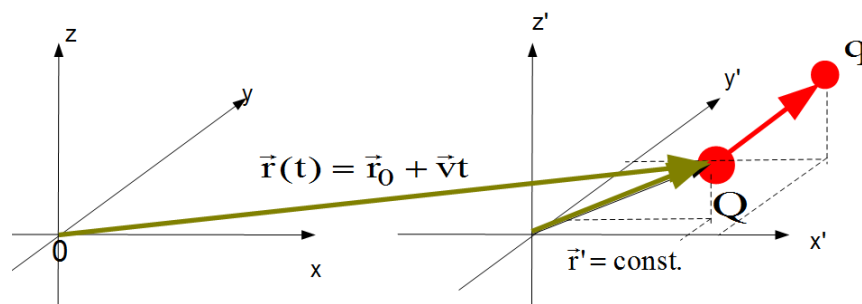


Abbildung 1.77: Skizze zur Berechnung der Lorentz-Kraft bei bewegten Inertialsystemen

S' misst nun für die Kraft auf die Probeladung q eine rein elektrische Kraft, welche vom Feld E' der Feldladung Q erzeugt wird. Er kann dies mit (1.308) berechnen

$$\vec{F}' = q\vec{E}' \quad (1.308)$$

Für einen Inertialbeobachter S hat die Feldladung Q jedoch die Geschwindigkeit v. Dies entspricht daher einem Strom $I=Q \cdot v$. Dieser Strom erzeugt für S also ein Magnetfeld. Zusätzlich misst S noch ein elektrisches Feld E, welches jedoch kleiner ist, als dasjenige das in S' gemessen wird. Er berechnet die Kraft auf die Probeladung in S also deshalb nach der allgemeinen Lorentzschen Kraftformel so

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{1.309}$$

Für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$, misst man, dass die Kräfte in S' und S genau gleich groß sind, sodass die Äquivalenz von (1.308) und (1.309) also ergeben muss

$$\vec{F}' = \vec{F} = q\vec{E}' = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{1.310}$$

Da wir aber bereits gesehen haben, wie Kräfte, welche zu Beschleunigungen führen, nach der SRT transformiert werden müssen, so müssen wir davon ausgehen, dass dieser soeben abgeleitete Zusammenhang nur im Fall $v \ll c$ gültig sein kann. Wir wollen diese intuitive Erkenntnis der „klassischen“ Relativität von E- und B-Feld an folgendem weiteren Gedankenexperiment nochmals untersuchen.

Der Raum sei von einem homogenen Magnetfeld B (blaue Pfeile) in y-Richtung durchsetzt. In S' ruhe ein Teilchen, das die elektrische Ladung q trägt. Die beiden Inertialsysteme S und S' seien mit v gegeneinander bewegt:

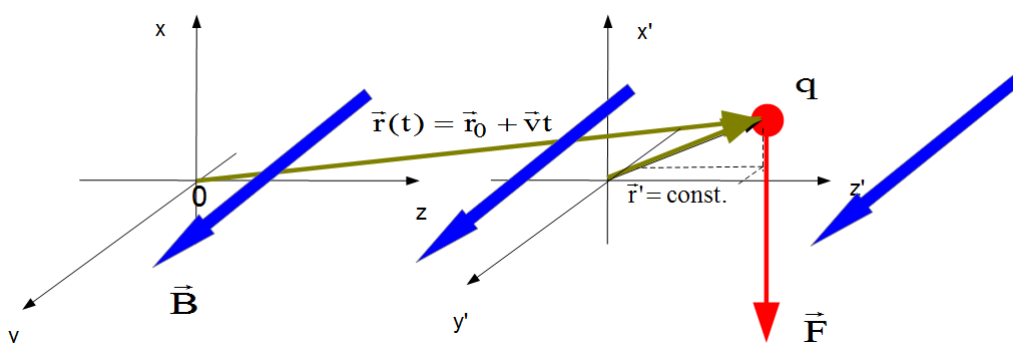


Abbildung 1.78: Skizze zum Newtonschen Relativitätsprinzip bei elektrischen- und magnetischen Feldern

Beide Beobachter in S und S' messen eine Kraftwirkung auf das geladene Teilchen anhand der Beschleunigung das es erfährt. Die Messergebnisse zeigen wieder, dass beide genau den gleichen Wert der Kraft messen. Nun berechnet jeder Beobachter nach der ihm bekannten Theorie von der Lorentz-Kraft die Kraftwirkung. Sie stimmt jeweils mit der Messung überein. Die jeweiligen Beobachter werden jedoch aufgrund der Relativbewegung mit v , unterschiedliche theoretische Ansätze wählen.

Für den Beobachter in S gilt mit der Lorentz-Kraft (1.307)

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Er rechnet also nur einen magnetischen Anteil ein.

Für den Inertialbeobachter S' befindet sich die Ladung q jedoch in Ruhe und er wählt einen rein elektrischen Erklärungsansatz

$$\vec{F}' = q\vec{E}'$$

Wiederum sollte von der theoretischen Beschreibung her, mit dem Newtonschen Relativitätsprinzip gelten

$$\vec{F}' = \vec{F} = q\vec{E}' = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Nach der damaligen Vorstellung vor Einstein, sollte die **Galilei-Transformation** zwischen den Koordinaten (1.1) und (1.2), die Umrechnung der Formeln ermöglichen.

Wir können uns dies veranschaulichen, wenn wir unser Gedankenexperiment um ein weiteres Inertialsystem S'', das sich mit $0,5*v$ gegen das Inertialsystem S in gleicher Richtung bewegt. Gemäß der Galilei-Transformation sollte dieser Beobachter dann aufgrund der Beschleunigung des Teilchens eine gleich große Kraft wie in S und S' folgendermaßen errechnen können:

$$\vec{F}'' = q\left(\frac{1}{2}\vec{v} \times \vec{B}''\right)$$

Es sollte dann wiederum folgende Gleichheit gelten

$$\vec{F}'' = \vec{F}' = \vec{F} = q\vec{E}' = q(\vec{v} \times \vec{B}) = q\left(\frac{1}{2}\vec{v} \times \vec{B}''\right)$$

Anhand des folgenden Gedankenexperimentes wollen wir uns nun damit beschäftigen, wie sich ein rein elektrisches Feld in ein magnetisches Feld, aufgrund einer Relativbewegung nach der damaligen klassischen Theorie mit Hilfe der Galilei-Transformation transformieren sollte. Ein wichtiger Erhaltungssatz der uns analog zur Erhaltung der Ruhemasse dabei leiten wird, ist der Erhaltungssatz von der elektrischen Ruhe-Ladung q_0 , welcher auch in der SRT eine fundamentale Rolle spielt

$$q_0 = q'_0 \quad (1.311)$$

In S herrsche ein homogenes elektrisches Feld, das durch 2 ruhende Leiterplatten der Länge l mit konstanter Flächenladungsdichte σ von $+Q/A$, bzw. $-Q/A$ erzeugt wird (Abbildung 1.79). Das von den Leiterplatten erzeugte elektrische Feld E in S , wirkt nur in y -Richtung und wird nach (1.312) berechnet

$$E_y = \frac{D_y}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1.312)$$

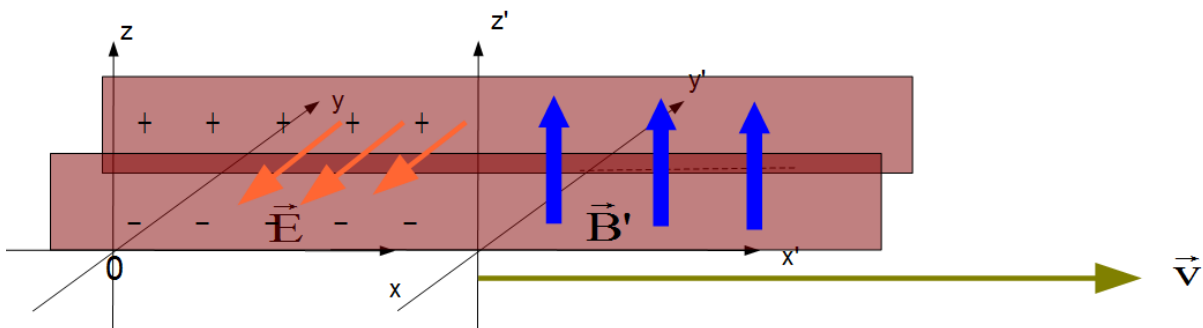


Abbildung 1.79: Klassische nicht-relativistische Transformation des elektrischen und magnetischen Feldes

Ein Inertialbeobachter S' bewegt sich nun mit v in x -Richtung. Er misst ein reines Magnetfeld B' , das so gerichtet ist, dass es die gleichen Auswirkungen auf eine bewegte Probeladung hat, wie das elektrische Feld E in S . S' kann zur Berechnung der Auswirkung des Magnetfeldes die „Rechte – Hand – Regel“ anwenden. Wie kann dies erklärt werden?

Das Auftreten dieses gerichteten Magnetfeldes B' , kann S' nur dadurch erklären, dass die Ladungen auf den Platten einen Flächenstrom j' in x -Richtung erzeugen, der wie in Abbildung 1.80 gerichtet sein muss.

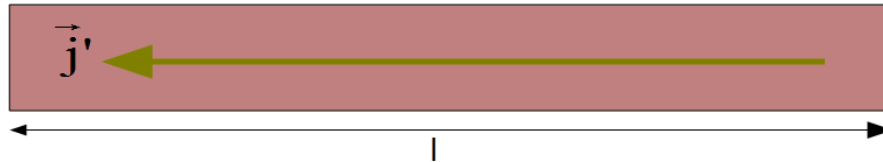


Abbildung 1.80: Darstellung des Flächenstromes j

Der Inertialbeobachter S' wendet die Galilei-Transformation (1.2) an und argumentiert also, dass sich der Linienstrom j' aus der bewegten Flächenladung (auf den in S ruhenden Leiterplatten) aufgrund der Relativbewegung mit Geschwindigkeit $-v$ in x -Richtung ergibt. Da klassisch $\sigma = \sigma'$ folgt

$$j'(x') = -\sigma \cdot v(x) \quad (1.313)$$

Allgemein gilt, dass das Magnetfeld, das durch eine Stromdichte j entsteht, generell mit dem Maxwell'schen Durchflutungsgesetz berechnet werden kann. Dieses lautet für S'

$$\oint \vec{H}' d\vec{s}' = \vec{j}' \vec{A}' + \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t} \vec{A}' \quad (1.314)$$

Da sich die Ströme in $\pm z$ -Richtung gegenseitig kompensieren, erhält S' eine Magnetfeldstärke nur in z -Richtung. Achtung hier ist mit j' wieder der Linienstrom gemeint

$$\oint \vec{H}' d\vec{s}' = H'(z) \cdot l' + H'(-z) \cdot l' = -j' \cdot l \quad \Rightarrow H'(z) = H'(-z) = -\frac{1}{2} j' \cdot l \quad (1.315)$$

In S' bewegen sich beide Ladungsträgeranteile, sodass dann für das Magnetfeld B' in z -Richtung folgt

$$B'(z) = \mu_0 2H'(z) = -\mu_0 j'(x') = B'_z \quad (1.316)$$

Mit (1.313) gilt dann wiederum da $\sigma = \sigma'$:

$$B'_z = \mu_0 \sigma \cdot v_x \quad (1.317)$$

Ersetzt man in (1.317) die Flächenladung σ durch den entsprechenden Ausdruck in (1.312) dann erhält S für die Transformation des elektrischen Feldes E

$$B'_z = -\varepsilon_0 \mu_0 v_x \cdot E_y \quad (1.318)$$

Das bedeutet also, dass ein Beobachter in S, der die elektrische Feldstärke E in y-Richtung misst, für das Feld in einem mit +v in x-Richtung relativ dazu bewegten Inertialsystem S' ein rein magnetisches Feld der Stärke B' in z-Richtung berechnen muss, damit das experimentell bestätigte Relativitätsprinzip gewahrt ist.

Der bewegte Beobachter in S' kann den Vektorcharakter vollständig berücksichtigen. Dies geschieht analog zur Herleitung der Transformationsformeln für das dynamische Massenmoment (siehe Kapitel 1.22.13, Seite 189-190) und erhält dann mit dem vektoriellen Kreuzprodukt, für die Transformationsformel den Zusammenhang

$$\vec{B}' = -\varepsilon_0 \mu_0 (\vec{v} \times \vec{E}) = -\frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \vec{E}) \quad (1.319)$$

Herrscht in S noch ein davon unabhängiges weiteres rein magnetisches Feld, dann kommt dies additiv zu dem transformierten Feld hinzu

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \vec{E}) \quad (1.320)$$

Bewegt sich ein Beobachter S' parallel zu den Feldlinien eines E- oder B-Feldes in S, nur dann muss er die Größen nicht transformieren.

Nach der klassischen nicht-relativistischen Theorie vor Einstein, folgt also für die Transformationsformeln welche sich allein aus den Galilei-Transformationen und der Lorentzschens Kraftformel ergeben, folgende Tabelle.

Die Transformationsformeln dieser Tabelle basieren auf der Galilei-Transformation (1.1) und (1.2) und sind deshalb nur dann zutreffend, wenn die Relativgeschwindigkeit $v \ll c$

Für S		Für S'		
Elektrisches Feld	Magnetisches Feld	Elektrisches Feld	Magnetisches Feld	
$E'_{\parallel v} = E_{\parallel v}$	$B'_{\parallel v} = B_{\parallel v}$	$E_{\parallel v} = E'_{\parallel v}$	$B_{\parallel v} = B'_{\parallel v}$	(1.321)
$\vec{E}'_{\perp v} = \vec{E}_{\perp v} + (\vec{v} \times \vec{B})$	$\vec{B}'_{\perp v} = \vec{B}_{\perp v} - \frac{1}{c^2}(\vec{v} \times \vec{E})$	$\vec{E}_{\perp v} = \vec{E}'_{\perp v} - (\vec{v} \times \vec{B}')$	$\vec{B}_{\perp v} = \vec{B}'_{\perp v} + \frac{1}{c^2}(\vec{v} \times \vec{E}')$	(1.322)

1.23.2 Transformation der elektromagnetischen Felder

Wir wollen nun an unsere Überlegungen aus Kapitel 1.23.1 anknüpfen und mit den bisherigen Erkenntnissen der SRT in diesem Buch zeigen, dass das Magnetfeld B sich bei hohen Geschwindigkeiten anders transformieren muss.

Wir vervollständigen also das Gedankenexperiment aus 1.23.1. Man betrachte dazu Abbildung 1.79.

Aufgrund der speziell-relativistischen Längenkontraktion ist die Länge der Leiterplatten in S' keine Eigenlänge, da die Leiterplatten zwar in S ruhen, nicht aber in S' .

Ein Inertialbeobachter in S berechnet also für die Fläche der Leiterplatten in S'

$$A' = \frac{A}{\gamma_v} \quad (1.323)$$

Da die gesamte Ladungsmenge Q eine Invariante, analog zur Ruhemasse im mechanischen Fall der SRT ist, gilt also $Q = Q'$ und damit

$$Q = \sigma A = \gamma_v \sigma A' = \sigma' A' \Rightarrow \sigma' = \gamma_v \sigma \quad (1.324)$$

Wir ersetzen in Formel (1.317) nun σ' durch den soeben abgeleiteten Ausdruck in (1.323)

$$B'_z = -\varepsilon_0 \mu_0 v_x \cdot \gamma_v \cdot E_y \quad (1.325)$$

Berücksichtigt man wiederum den vektoriellen Charakter des magnetischen- und elektrischen Feldes vollständig und erlaubt man ein zusätzliches B -Feld in S dann folgt für die vollständige Transformation des magnetischen Feldes für S (analog (1.320))

$$\vec{B}'_{\perp v} = \gamma_v \left(\vec{B}_{\perp v} - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \vec{E}) \right) \quad (1.326)$$

Würde dies nicht gelten, dann würde S ein zu kleines magnetisches Feld senkrecht zur Relativbewegung für S' berechnen. Desweiteren könnte dann eine Messung innerhalb eines Inertialsystem die gleichförmige Bewegung feststellen. Dies ist jedoch gemäß dem speziellen Relativitätsprinzip nicht möglich.

Für die allgemeine Ableitung der Transformationsformeln, wollen wir das Relativitätsprinzip und seine Forderung der Invarianz unter der Lorentz-Transformation auf das elektromagnetische Feld anwenden und werden sehen, dass die Feldstärken bei der Umrechnung auf andere Inertialsysteme modifiziert werden müssen, damit sie das Relativitätsprinzip erfüllen und somit korrekte Umrechnungen zwischen den physikalischen Größen erlauben.

Wir folgen hier den Gedankengängen, die Albert Einstein 1905 in seiner Arbeit „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“ [4] entwickelt hat.

Ein Raumgebiet des Inertialsystemes S (welches wir als das „ruhende“ ansehen), welches wir uns zunächst als leer vorstellen, sei von einem elektromagnetischen Feld durchsetzt. Die folgenden beiden Maxwell'schen Gleichungen beschreiben dann die Feldgrößen in korrekter Weise

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.327}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Wir lassen die ordinären Stromdichten \vec{j} zunächst unberücksichtigt, da es sich nur um einen additiven Term handelt.

Das elektromagnetische Feld sei nun dergestalt, dass der elektrische Feldstärke-Vektor \vec{E} in die x -Richtung gerichtet ist. Aus den Maxwell-Gleichungen für den leeren Raum folgt dann daraus, dass die Vektoren des magnetischen B -Feldes dann nur Komponenten in y - und z -Richtung aufweisen.

Im als ruhend angenommenen System S, ergeben sich sechs Komponenten-Gleichungen

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot } \vec{B} & & -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot } \vec{E} \\
 \updownarrow & & \updownarrow \\
 \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} & & \frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \\
 \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} & & \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \\
 \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} & & \frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}
 \end{array}$$

Ein Inertialsystem S' bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit v in x-Richtung (Richtung des E-Feldes) in Bezug auf S. Ein geladenes Teilchen befinde sich im Ursprung von S' und ruhe diesbezüglich. Der Ursprung von S' möge im Mittelpunkt des Teilchens ruhen. Wir wenden auf obige Gleichungen die Lorentz-Transformation an und erhalten 6 Gleichungen die in S' ihre Gültigkeit bewahren. Wir schreiben die zwei Gleichungen an, die für die x-Komponente gelten

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial y'} \left(\gamma_v \left(B_z - \frac{v_x}{c^2} E_y \right) \right) - \frac{\partial}{\partial z'} \left(\gamma_v \left(B_y + \frac{v_x}{c^2} E_z \right) \right) \quad -\frac{\partial B_x}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial y'} \left(\gamma_v (E_z + v_x B_y) \right) - \frac{\partial}{\partial z'} \left(\gamma_v (E_x - v_x B_z) \right)$$

Das Relativitätsprinzip fordert nun, dass die Maxwell-Gleichungen, wenn sie von einem Beobachter in S' mit den „gestrichenen Größen“ berechnet werden, analog zu der Form wie in S gültig sein müssen. Wir schreiben sie wiederum in Komponentenschreibweise wie oben, jedoch nur für die x-Komponente an

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} = \frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} \quad \frac{\partial B'_x}{\partial t'} = \frac{\partial E'_y}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial y'}$$

Die Gleichungen für die y- und z-Richtung lassen sich auf analoge Weise gewinnen.

Diese Zusammenhänge können nur gültig sein, wenn in unserer Standardkonfiguration, bei der der E-Feld Vektor nur in x-Richtung zeigt und die Relativbewegung von S' in Bezug auf S mit v in x-Richtung stattfindet, sich die elektrischen- und magnetischen Felder folgendermaßen transformieren.

Für S		Für S'		
Elektrisches Feld	Magnetisches Feld	Elektrisches Feld	Magnetisches Feld	
$E'_x = E_x$	$B'_x = B_x$	$E_x = E'_x$	$B_x = B'_x$	(1.328)
$E'_y = \gamma_v (E_y - v_x B_z)$	$B'_y = \gamma_v (B_y + \frac{v_x}{c^2} E_z)$	$E_y = \gamma_v (E'_y + v_x B'_z)$	$B_y = \gamma_v (B'_y - \frac{v_x}{c^2} E'_z)$	(1.329)
$E'_z = \gamma_v (E_z + v_x B_y)$	$B'_z = \gamma_v (B_z - \frac{v_x}{c^2} E_y)$	$E_z = \gamma_v (E'_z - v_x B'_y)$	$B_z = \gamma_v (B'_z + \frac{v_x}{c^2} E'_y)$	(1.330)

Sinngemäß schreibt Einstein dazu in [4]: Man sieht, dass in der entwickelten Theorie, die elektrischen und magnetischen Felder keine vom Bewegungszustand relativ zu diesen, unabhängige Existenz besitzen.

Jedwede Asymmetrien bei der Betrachtung bewegter Leiter und durch Magnete erzeugte Ströme verschwinden.

Beispiel: In S wirke ein elektromagnetisches Feld, das durch die Maxwell-Gleichungen gegeben ist, wobei der E-Feldvektor in x-Richtung zeigt und die Komponenten des B-Feldvektors in y- und z-Richtung. Wenn sich ein geladenes Teilchen mit v in x-Richtung bewegt und sich der Ursprung des Inertialsystemes S' in dem Teilchen befindet, dann berechnet S für die Kraftwirkung (in S') auf das Teilchen :

$$F'_x = qE'_x = qE_x$$

$$F'_y = qE'_y = q\gamma_v (E_y - v_x B_z) \quad (1.331)$$

$$F'_z = qE'_z = q\gamma_v (E_z + v_x B_y)$$

Die Transformation der Kräfte für S' ergibt sich aus (rechte Spalte (1.244) und (1.245)), wegen $v'_x=0$

$$F_x = F'_x \tag{1.332}$$

$$F_{y,z} = \gamma_v^{-1} F'_{y,z}$$

Nach Anwendung des relativistischen Trägheitsgesetzes (1.235)

$$\vec{F} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = m_0 (\gamma_v^3 \vec{a}_{//v} + \gamma_v \vec{a}_{\perp v}) \tag{1.333}$$

erhält man die relativistischen Bewegungsgleichungen für das geladene Teilchen unter den eingangs erwähnten Voraussetzungen

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \gamma_v^{-3} \frac{q}{m_0} E_x$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \gamma_v^{-1} \frac{q}{m_0} (E_y - v_x B_z) \tag{1.334}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \gamma_v^{-1} \frac{q}{m_0} (E_z + v_x B_y)$$

Es ist zu beachten, dass diese Bewegungsgleichungen nur für ein elektromagnetisches Feld gilt, das die Eigenschaft hat, dass der E-Feldvektor exakt in x-Richtung und die B-Komponenten nur in y- und z-Richtung weisen, wobei die Bewegung des langsam beschleunigten Elektrons in x-Richtung stattfindet.

Es ist zu beachten, dass die bis hier abgeleiteten Gesetzmäßigkeiten relativistisch unvollständig sein müssen, da wir bereits gesehen haben, dass das Relativistische Trägheitsgesetz ohne den Zusatzterm der Energieänderung zu Problemen bei der Drehimpulserhaltung führt (Hebel-Paradoxon, Seite 182).

Wir wollen deshalb im Kapitel 1.23.4, für allgemein überlagerte elektromagnetische Felder, die Bewegungsgleichungen anhand der Lorentz-Kraft (1.307) und der relativistischen Leistung herleiten.

Zuvor wollen wir uns noch kurz die experimentelle Bestätigung der Transformationsgesetze ansehen.

Experimentelle Bestätigung der Relativität der elektromagnetischen Feldgrößen durch W. Wien 1916

Diese relativistische Transformation der elektromagnetischen Felder (1.328) – (1.330), wurde 1916 von Wilhelm Wien experimentell bestätigt.

Zum damaligen Zeitpunkt, war bekannt, dass durch ein elektrisches Feld Spektrallinien leuchtender Gase aufgrund des Stark-Effektes, aufgespalten werden. W. Wien sandte nun sogenannte „Kanalstrahlen“, bestehend aus positiv geladenen Wasserstoffionen in x-Richtung quer durch ein Magnetfeld, welches in y- und z-Richtung gerichtet war. Das Magnetfeld hat vom ruhenden Labor (Inertialsystem S) aus gesehen, dann die Komponenten B_y und B_z ($B_x=0$).

Auf die Kanalstrahlen wirkt also gemäß der Transformationsformeln neben einem B' -Feld folgendes elektrisches Feld (in S')

$$E'_x = 0, \quad E'_y = -\gamma_v v_x \cdot B_z, \quad E'_z = \gamma_v v_x \cdot B_y$$

In dem Experiment wurde das Licht das die Wasserstoffkanalstrahlen aussenden spektral zerlegt. Dabei zeigte sich bei den Wasserstoff-Spektrallinien $H\alpha$ und $H\beta$ genau die Aufspaltung, die vom Stark-Effekt bekannt ist. Da das von außen angelegte Magnetfeld diese Aufspaltung nicht hervorrufen kann, ist das Ergebnis des Wienschen Experimentes ein Beweis für die Tatsache, dass die Charakterisierung eines elektromagnetischen Feldes vom Bewegungszustand des Beobachters nach den Transformationsgleichungen (1.328) – (1.330) abhängt.

1.23.3 Das elektromagnetische Feld einer bewegten Ladung

Eine elektrische Punktladung Q ruhe im Ursprung des Inertialsystemes S' , das sich mit v in Bezug auf S in x -Richtung bewegt. Die Ladung q ruhe in S nicht im Ursprung, sondern bei r (Abbildung 1.81). Wir wollen nun berechnen, wie das elektromagnetische Feld der bewegten Ladung Q , auf die Ladung q wirkt, wenn S' gerade bei $t=0$ den Ursprung von S passiert.

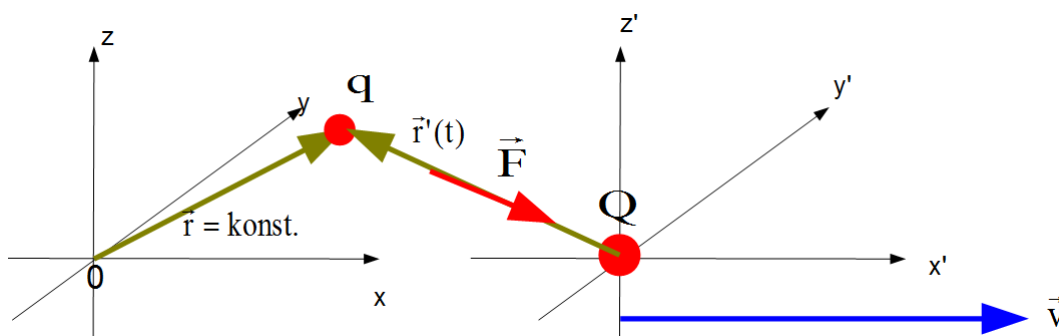


Abbildung 1.81: Skizze zur Herleitung des elektromagnetischen Feldes einer bewegten Punktladung

In S' ist das E-Feld das auf die Probeladung bei r' wirkt, aus der Elektrostatik bekannt. Es handelt sich um das kugelsymmetrische Coulomb-Feld

$$\vec{E}'(r', t') = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r'^3} \quad (1.335)$$

Die Probeladung q sei beliebig klein, dann herrscht in S' also kein Magnetfeld am Ort r' ($B'=0$). Wenn S berechnen möchte, was in S' gemessen wird, dann wendet er die Lorentz-Transformation zunächst auf die Koordinaten an. Längenmaße in x -richtung erfahren eine Längenkontraktion (nach (1.77))

$$\begin{aligned} x' &= -\gamma_v x \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (1.336)$$

Für den Betrag des Ortsvektors r' erhält S also die Formel

$$r' = \sqrt{\gamma_v^2 x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.337)$$

Setzt man dies in (1.335) ein dann gilt für die Komponenten des E-Vektors

$$\begin{aligned} E'_x &= -\frac{Q\gamma_v v_x t}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'^3} \\ E'_y &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{r'^3} \\ E'_z &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r'^3} \end{aligned} \quad (1.338)$$

Im nächsten Schritt muss S den Einfluss des E-Feldes wissen und (1.338) unter Anwendung von (1.328) – (1.330) transformieren

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x = -\frac{Q\gamma_v v_x t}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'^3} \\ E_y &= \gamma_v (E'_y - v_x B'_z) = \gamma_v \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{r'^3} \\ E_z &= \gamma_v (E'_z + v_x B'_y) = \gamma_v \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r'^3} \end{aligned} \quad (1.339)$$

Für den Betrag des Ortsvektors nutzt S den Zusammenhang mit seinen „ungestrichenen“ Koordinaten (1.337). In kompakter Vektornotation lassen sich diese Komponentengleichungen zu einer Gleichung zusammenfassen

$$\vec{E}(\vec{r}, t = 0) = \gamma_v \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{\left(\sqrt{\gamma_v^2 x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} \quad (1.340)$$

Das E-Feld der sich bewegenden Feldladung Q ist am beliebigen Ort einer ruhenden Probeladung zwar radial aber nicht mehr kugelsymmetrisch (Abbildung 1.82).

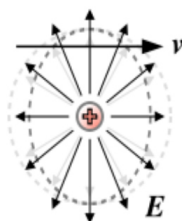


Abbildung 1.82: Schematische Darstellung des elektrischen Feldes einer mit Geschwindigkeit v bewegten Punktladung [5]

Zugleich erzeugt die bewegte Feldladung Q am Ort der Probeladung ein nicht zu vernachlässigendes Magnetfeld. Dies ergibt sich ebenfalls aus den Transformationsgleichungen (1.328) – (1.330).

$$\vec{B}(\vec{r}, t = 0) = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{\left(0, \frac{-\gamma_v v_x y'}{c^2}, \frac{-\gamma_v v_x z'}{c^2} \right)}{\left(\sqrt{\gamma_v^2 x^2 + y^2 + z^2} \right)^3} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{\gamma_v (\vec{v} \times \vec{r})}{\left(\sqrt{\gamma_v^2 x^2 + y^2 + z^2} \right)^3} \quad (1.341)$$

Im nicht-relativistischen Grenzfall $v \ll c$ folgen die klassischen Gesetze für das elektrostatische und magnetische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}, t = 0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^3} \quad (1.342)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t = 0) = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^3}$$

1.23.4 Relativistische Bewegungsgleichung im elektromagnetischen Feld

Bei einer beliebigen Überlagerung von elektrischem- und magnetischem Feld ist die Kraft auf eine Probeladung durch die allgemeine Form der Lorentz-Kraft gegeben (1.307). Wir haben jedoch gesehen, dass eine korrekte Berechnung eines Bewegungsvorganges auch die relativistische Energieänderung, welche mit dem relativistischen Trägheitsgesetz verbunden ist berücksichtigt werden muss (siehe Hebel-Paradoxon, Seite 182), da es sonst zu Widersprüchen u.a. mit dem Drehimpulserhaltungssatz kommen kann.

Die zeitliche Energieänderung eines Teilchens im elektromagnetischen Feld lässt sich aus dem elektrischen Potential Φ_{el} herleiten.

Die potentielle Energie eines Teilchens mit Ladung q , im elektrischen Feld ist

$$E_{pot} = q \cdot \Phi_{el}(\vec{r}(t)) \quad (1.343)$$

Wenn wir von einer beliebigen räumlichen Feldverteilung ausgehen, dann muss für die zeitliche Änderung der Energie eines mit v bewegten Teilchens in diesem Feld aufgrund des allgemeingültigen Zusammenhangs zwischen zeitlicher Energieänderung und der relativistischen Trägheit gelten:

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial(\gamma_v m_0 c^2)}{\partial t} = \vec{v} \cdot \vec{F} = \frac{\partial(q \cdot \Phi_{el}(\vec{r}(t)))}{\partial t} = q \cdot \vec{v} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (1.344)$$

Zusammen mit der Lorentz-Kraft (1.307), dem relativistischen Kraftgesetz (1.333) und der relativistischen Leistung (1.336), gelten also folgende Gleichungen, welche Bewegungsvorgänge von elektrisch geladenen (nicht spin-behafteten) Teilchen in beliebigen elektromagnetischen Feldern im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie korrekt beschreiben

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{\partial(\gamma_v m_0 c^2)}{\partial t} = q \cdot \vec{v} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} &= \frac{\partial(\gamma_v m_0 \vec{v})}{\partial t} = q(\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v} \times B(\vec{r}, t)) \end{aligned}} \quad (1.345)$$

1.23.5 Herleitung der Lorentz-Kraft

Zwei Punktladungen Q und q ruhen im Inertialsystem S' . Die Punktladung Q bildet den Ursprung von S' und q befindet sich an einem beliebigen Ort in der $y'z'$ -Ebene von S' ($x'=0$). S' bewege sich mit v in Bezug auf S in x -Richtung (Abbildung 1.83).

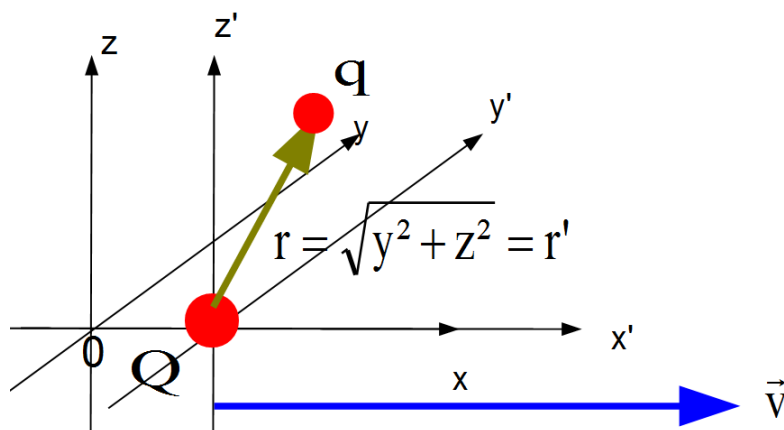


Abbildung 1.83: Schematische Darstellung zur Herleitung der Lorentz-Kraft

Im Inertialsystem S' ist die Kraft zwischen Q und q im Abstand $r=r'$, stets die Coulomb-Kraft, mit folgenden Komponenten

$$F'_x = 0 \quad F'_y = \frac{Qqy'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \quad F'_z = \frac{Qqz'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \quad (1.346)$$

Mit der Lorentz-Transformation für die Kraft (1.244) und (1.245), kann daraus die Kraft in S berechnet werden, da $y=y'$ und $z=z'$:

$$F_x = F'_x = 0 \quad F_y = \frac{F'_y}{\gamma_v} = \frac{Qqy}{\gamma_v 4\pi\epsilon_0 r'^3} \quad F'_z = \frac{Qqz}{\gamma_v 4\pi\epsilon_0 r'^3} \quad (1.347)$$

In Vektorschreibweise lautet dies

$$\vec{F} = \frac{Q \cdot q}{\gamma_v 4\pi\epsilon_0 r'^3} \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.348)$$

Wenn nun aber S' zum Zeitpunkt $t=0$, gerade den Ursprung von S passiert, also auch Q im Ursprung von S liegt, dann ist S auch ein momentanes Ruhesystem für q. Für diesen Fall haben wir bereits eine gültige Formel (1.340), für das wirkende elektrische Feld von Q auf q berechnet.

$$\vec{E}(\vec{r}, t = 0) = \gamma_v \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{\left(\sqrt{\gamma_v^2 x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} = \gamma_v \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'^3} \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.349)$$

Dieses elektrische Feld erzeugt nun eine Kraftwirkung auf q

$$\vec{F}(\vec{r}, t = 0) = q \cdot \vec{E}(\vec{r}, t = 0) = \gamma_v \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'^3} \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.350)$$

Wir vergleichen (1.350) mit (1.348) und bilden die Differenz (1.348)-(1.350)

$$\Delta\vec{F}(\vec{r}, t = 0) = \left(\frac{1}{\gamma_v} - \gamma_v\right) \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'^3} \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.351)$$

Das ist ein verblüffendes Resultat, denn der einzige Unterschied zum Fall der Herleitung von (1.340), ist die nun fehlende Relativbewegung zwischen der Punktladung Q und q. Wir schließen daraus: Die hier vorhandene Kraftdifferenz, deren einzige Ursache jedoch eine Relativbewegung einer Ladung ist und nur senkrecht zur Bewegungsrichtung wirkt, wie in diesem Fall, muss eine magnetische Kraft sein, deren Ursache ein magnetisches Feld B ist.

Wir können also die Forderung erheben, dass

$$\Delta\vec{F}(\vec{r}, t = 0) = \left(\frac{1}{\gamma_v} - \gamma_v\right) \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'^3} \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = F_{mag} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Wir können die erste Klammer mit den Lorentz-Faktoren auflösen und erhalten

$$\Delta \vec{F} = \vec{F}_{mag} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = -\gamma_v \frac{v^2}{c^2} \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'^3} \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.352)$$

Wir vergleichen F_{mag} (1.352) mit der elektrischen Kraft aus (1.350) und erhalten den Wert des Quotienten aus magnetischer- und elektrischer Kraft

$$\frac{\vec{F}_{mag}}{\vec{F}_{el}} = -\frac{v^2}{c^2} \quad (1.353)$$

Wenn $v=0$ dann ist die Kraft zwischen Q und q von S gesehen eine reine elektrische Kraft, dies folgt aus (1.350), da $\Delta F = 0$!

Wenn $v=c$, dann würde die Gesamtkraft unendlich werden (Q und q bewegen sich in festem Abstand an S vorbei), Das heißt dann mit (1.353): $F_{mag} = -F_{el}$. Diese Tendenz kann bei Beschleunigern beobachtet werden.

Für den Zusammenhang zwischen elektrischem und magnetischem Feld der bewegten Ladung Q , gemessen im Laborsystem S erhalten wir aus

$$\vec{F}_{mag} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{und} \quad \vec{F}_{el} = q\vec{E}$$

wenn man dies in (1.353) einsetzt

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{c^2}{v^2} (\vec{v} \times \vec{B}) \\ \vec{B} &= \frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \vec{E}) \end{aligned} \quad (1.354)$$

Da der Vektor B immer senkrecht zur Relativgeschwindigkeit v gerichtet ist, folgt für das Verhältnis der Beträge von elektrischem zu magnetischem Feld

$$B = \frac{v}{c^2} E \quad (1.355)$$

Wenn die Geschwindigkeit v der elektrischen Ladung gegen c geht, dann gilt

$$B = \frac{1}{c} E \quad (1.356)$$

Dies ist vollständig bei elektromagnetischen Wellen erfüllt.

Wir haben also festgestellt, dass das messbare Magnetfeld B einer bewegten Ladung Q , relativistisch erklärt werden kann, als eine Änderung des elektrischen Feldes, die durch eine Relativbewegung zwischen q und Q erzeugt wird. Diese Änderung der Coulomb-Kraft auf eine Probeladung q ΔF (1.352), ergibt die Lorentz-Kraft (ohne additives elektrisches Feld) (siehe (1.307))

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Man kann zeigen, dass das Magnetfeld eines Stromes und die daraus resultierende Lorentz-Kraft auf eine bewegte Probeladung, sich mit der Relativitätstheorie allein aus den beiden getrennten Gesetzen, dem Coulomb Gesetz und dem Biot-Savart-Gesetz unter Verbindung mit der Lorentz-Transformation herleiten lässt. Das Magnetfeld ist also im Sinne der Relativitätstheorie eine Änderung des elektrischen Feldes aufgrund bewegter Ladungen.

Quellen

- [11]** D. Meschede (Hrsg.): Gerthsen Physik, Springer Spektrum; Auflage: 25. Aufl. 2015. Neuauflage 2015 (17. März 2015), ISBN-10: 3662459760, ISBN-13: 978-3662459768
- [2]** M. Born: Die Relativitätstheorie Einsteins, Springer; Auflage: 7. Aufl. 2003 (21. Juli 2003), ISBN-10: 354000470X, ISBN-13: 978-3540004707
- [3]** J. Grehn, J. Krause: Metzler Physik, Schroedel Verlag GmbH; Auflage: 4. (1. August 2007), ISBN-10: 3507107104 , ISBN-13: 978-3507107106
- [4]** Albert Einstein: Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Annalen der Physik und Chemie, Jg. 17, 1905, S. 891–921
- [5]** W. Demtröder: Experimentalphysik 2: Elektrizität und Optik, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2. Auflage, 1999, ISBN: 3-540-651-96-9
- [6]** tiburski.de/cybernautenshop/virtuelle_schule/dfu/akustik/Akustik-Dateien/image004.gif
- [7]** R. P. Feynman: The Feynman Lectures on Physics, Vol. II: The New Millennium Edition: Mainly Electromagnetism and Matter, Basic Books; Auflage: New Millenium (4. Oktober 2011), ISBN-10: 0465024947, ISBN-13: 978-0465024940
- [8]** W. Nolting: Grundkurs Theoretische Physik 4: Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik; Springer; Auflage: 6., aktual. Aufl. 2005 (23. März 2005), ISBN-10: 3540241191, ISBN-13: 978-3540241195
- [9]** J. D. Jackson: Klassische Elektrodynamik, De Gruyter; Auflage: 5. überarb. (18. Dezember 2013), ISBN-10: 3110334461, ISBN-13: 978-3110334463
- [10]** Michael Tsampanlis: Special Relativity: An Introduction with 200 Problems and Solutions, Springer; Auflage: 2010 (29. Mai 2010) , ISBN-10: 3642038360 , ISBN-13: 978-3642038365
- [11]** J. Freund: Spezielle Relativitätstheorie für Studienanfänger, UTB GmbH; Auflage: 1 (20. März 2007), ISBN-10: 3825228843, ISBN-13: 978-3825228842
- [12]** J. M. Gaßner / Jörn Müller: Können wir die Welt verstehen, S. Fischer: 2019; ISBN 978-3-10-397481-2